DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Fünfzehnter Jahrgang | 29. Juli 1927 | Heft 30

Zygotische Geschlechtsbestimmung und Sexualhormone[1]).

Von Richard Goldschmidt, Berlin-Dahlem.
(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Biologie.)

Die biologische Bearbeitung des Geschlechtsproblems hat sich bisher vorwiegend auf fünf verschiedenen Wegen bewegt. Die Cytologie hat die feineren Vorgänge aufzuklären versucht, die mit der Verteilung der Geschlechter zusammenhängen. Die Vererbungswissenschaft bearbeitete die Vererbung des Geschlechts und suchte sie dem für andere Eigenschaften bekannten Erbmechanismus einzugliedern. Die Entwicklungsphysiologie im Zusammenhange mit der Erbanalyse, suchte die Entstehung der Geschlechtscharaktere auf Grund der gegebenen Erbkonstitution zu erklären. Die Lehre von der inneren Sekretion vermochte für gewisse Tiergruppen einen der Entwicklungsfaktoren in der Ausscheidung von Sexualhormonen durch die Keimdrüsen zu eruieren. Die Biochemie endlich suchte an die chemische Basis der sexuellen Differenzen heranzukommen. Von diesen Methoden hat die letztere bisher noch wenig zur Aufklärung der Probleme beigetragen. Zwar hat sie viele Tatsachen über die Differenzen im Chemismus der Geschlechter zutage gefördert. Die Versuche aber, primäre chemische Unterschiede qualitativer (z. B. Lecithingehalt der Eier) oder quantitativer Natur (z. B. Stoffwechselintensität) als Ursache der verschiedenen geschlechtlichen Differenzierung aufzuweisen, sind bisher entweder noch ganz in der Luft hängend oder aber überhaupt nicht ernst zu nehmen. Von den anderen vier Forschungsrichtungen haben aber die ersten drei, Cytologie, Genetik und Entwicklungsphysiologie zu so völlig klaren, eindeutigen und miteinander harmonierenden Vorstellungen geführt, daß sie als die sichere Basis einer jeden Betrachtung der Geschlechtsprobleme angesehen werden müssen. Scheinbar nun stehen die Ergebnisse der vierten Forschungsrichtung, der Hormonlehre abseits. Die überwiegende Mehrzahl der vorher genannten Erkenntnisse sind an Pflanzen und niederen Tieren gewonnen. Sexualhormone sind aber mit Sicherheit nur von den Wirbeltieren, hauptsächlich den Vögeln und Säugetieren bekannt. Da ferner die Mehrzahl der Forscher, die sich mit den Hormonen der Wirbeltiere beschäftigen, von medizinischer Seite kommen und die genannten fundamentalen Ergebnisse der Biologie nur unvollkommen oder gar nicht kennen (natürlich von rühmlichen Ausnahmen abgesehen), so hat es den Anschein gewinnen können, als ob es völlig verschiedene Probleme und Grundanschauungen über das Wesen des Geschlechtes bei höheren Wirbeltieren einerseits und anderen Organismen andererseits gebe. Davon kann aber nicht die Rede sein, wenn man den gesamten Tatsachenkomplex überblickt, vielmehr fügen sich auch die Verhältnisse der höheren Wirbeltiere in geordneter Weise dem Gesamtbilde ein, wenn sie richtig betrachtet werden. Dieser Satz soll im folgenden belegt werden[1]).

Zunächst müssen wir uns in Kürze über das Wesen der allgemeinen Geschlechtsbestimmungstheorie klar werden, wie sie aus der Zusammenarbeit von Cytologie, Genetik und Entwicklungsphysiologie entwickelt wurde. Die beiden Fragen, die da beantwortet wurden, sind die nach dem Mechanismus, der die Verteilung der Individuen auf die beiden Geschlechter — normalerweise zu gleichen Teilen — bewirkt, und sodann die Frage nach den physiologischen Vorgängen, die durch den genannten Mechanismus in Gang gesetzt werden und zur entwicklungsgeschichtlichen Entscheidung über das Geschlecht führen. Die erstere Frage ist, wie heute wohl allgemein bekannt ist, durch die Zusammenarbeit von Cytologie und Vererbungslehre vollständig gelöst. Der Mechanismus ist dadurch gegeben, daß ein Geschlecht zwei Sorten von Geschlechtszellen erzeugt (heterogametisches Geschlecht), das andere Geschlecht aber nur eine Sorte (Homogametisches Geschlecht), und zwar ist bei den meisten zweigeschlechtigen Organismen, darunter auch den Säugetieren, das männliche Geschlecht das heterogametische, bei den Schmetterlingen und Vögeln ist es aber das weibliche. Die beiden Sorten von Gameten des heterogameten Geschlechts unterscheiden sich durch Besitz oder Fehlen eines Geschlechtschromosoms (X-Chromosom), während alle Gameten des homogameten Geschlechts es besitzen. So sind zwei Befruchtungsarten gleich wahrscheinlich, die zu Individuen mit zwei X-Chromosomen, also dem homogameten Geschlecht, oder solchen mit einem X-Chromosom, dem heterogameten Geschlechte, führen. In den Geschlechtschromosomen aber liegt, wie das Vererbungsexperiment zeigt, ein Gen (oder Gruppen von Genen), dessen Anwesenheit in Einzahl — vergleichbar der mendelschen Heterozygote — dar-

[1]) Nach einem an der Hamburgischen Universität gehaltenen Gastvortrag.

[1]) Der Verf. hat sich schon öfters bemüht diese Beziehungen dem jeweiligen Stand der Wissenschaft entsprechend klarzulegen, z. B. in Intersexuality and the endocrine aspect of sex. Endocrinology 1. 1917. — Die biologischen Grundlagen der konträren Sexualität usw. Arch. f. Rassen- u. Gesellschaftsbiol. 12, 1916. — Mechanismus und Physiologie der Geschlechtsbestimmung, Berlin: Bornträger 1920. — Die zygotischen sexuellen Zwischenstufen. Ergebn. d. Biol. 2. 1927.

über entscheidet, daß die Charaktere des einen Geschlechts zur Entwicklung gelangen, dessen Anwesenheit in Zweizahl — vergleichbar der mendelschen Homozygote — aber über die Differenzierung des anderen Geschlechts entscheidet.

Diese fundamentalen Erkenntnisse in bezug auf den Mechanismus der Geschlechtsverteilung zeigen, daß im Normalfall bei der Befruchtung, also zygotisch, die geschlechtliche Alternative entschieden wird. (Das schließt allerdings nicht aus, daß später doch noch ein Geschlechtswechsel eintreten kann, wie alsbald verständlich werden wird.) Es ist nun die Frage zu beantworten, wie es kommt, daß die durch den Geschlechtschromosomenmechanismus bedingte alternative Ausgangssituation: Ei mit zwei X-Chromosomen — Ei mit einem X-Chromosom, die Entwicklung des einen oder anderen Geschlechts herbeiführt. Die Antwort auf diese Frage wurde erhalten durch die Analyse des Intersexualitätsphänomens, der Erscheinung, daß in bestimmten Experimenten Individuen erzeugt werden können, die während ihrer Entwicklung zu bestimmten Zeitpunkten ihr Geschlecht wechseln. Diese Analyse ergab, daß in jedem befruchteten Ei und somit in jedem Individuum sich die Determinationsstoffe oder Erbfaktoren für die Entwicklung beider Geschlechter finden. Von diesen Geschlechtsgenen ist das eine, und zwar das der weiblichen Determination beim Säugetiertypus in den Geschlechtschromosomen gelegen, das andere, also das männliche beim Säugetiertypus, außerhalb der Geschlechtschromosomen. Daraus ergibt sich bereits, daß am Ausgangspunkte der Entwicklung stets die gleiche Menge der Bestimmungsstoffe für das eine Geschlecht (bei den Säugern das männliche) vorhanden ist; für das andere Geschlecht (bei den Säugern das weibliche) aber sind verschiedene Quantitäten q oder $2\,q$ vorhanden, je nachdem ein oder zwei Geschlechtschromosomen da sind. Der Geschlechtschromosomenmechanismus regelt somit das Verhältnis der männlichen und weiblichen Gene am Ausgangspunkt der Entwicklung, so daß der Einheitsquantität der einen Sorte die einfache oder doppelte der anderen gegenübersteht. Daraus folgt, daß zygotisch über das Geschlecht durch eine quantitative Relation der beiderlei Gene entschieden wird nach der Formel (für Säugetiere) $M > F < 2\,F$, wobei M das Männlichkeitsgen und F das Weiblichkeitsgen darstellt. Die Analyse zeigte ferner, daß diesen Genen Reaktionsketten beigeordnet sind, deren Geschwindigkeiten proportional den Ausgangsquantitäten der Gene sind; Reaktionen, deren Endprodukt die entwicklungsgeschichtlichen Determinationsstoffe für die geschlechtliche Differenzierung sind. Endlich zeigt die Analyse, daß die Kurven der männlichen und weiblichen Reaktionen zeitlich verschieden liegende Schnittpunkte haben können, wenn die relativen Quantitäten von M und F nicht richtig aufeinander eingestellt sind. Aus all dem folgt, daß der Geschlechtschromosomenmechanismus dafür sorgt, daß von den beiden gleichzeitigen und konkurrierenden geschlechtsbestimmenden Reaktionen, die eine oder andere durch höhere Ausgangsquantität der wirksamen Gene die größere Geschwindigkeit erhält und damit die geschlechtliche Differenzierung kontrolliert[1]). Diese Lösung kann in dem Kurvenschema Fig. 1 graphisch dargestellt werden, in dem die Form der Kurven willkürlich gewählt ist, aber mit der Bedingung, daß die Möglichkeit für die Entstehung der nachgewiesenen Schnittpunkte gegeben ist, die aber im Normalfall nicht im Laufe der Entwicklung eintreten.

So, wie bisher dargestellt, liegt die Situation für die Tiergruppen, bei denen es keine Hormone der Sexualdrüsen gibt und jedenfalls auch für die echt zweigeschlechtigen Pflanzen. Gibt es nun zunächst a priori irgendeinen Grund, warum diese allgemeine Theorie der Geschlechtsbestimmung, die aus der cytologischen und genetischen Analyse folgt, nicht auf höhere Wirbeltiere anwendbar sein sollte? Kein solcher Grund ist sichtbar, da alle die elementaren Tatsachen, von denen die Theorie abgeleitet ist, auch für diese Tiergruppen zutreffen. Da ist zunächst die cytologische Situation. Für Vögel sowohl, wie für Säugetiere ist der Geschlechtschromosomenmechanismus nachgewiesen, z. B. von SHIWAGO für das Huhn, OGUMA für die Taube, PAINTER für Säugetiere aller Klassen, WINIWARTER, OGUMA, KIHARA für den Menschen. In beiden Ordnungen kommt typische geschlechtsgebundene Vererbung vor, die ja bekanntlich auf der Lage der verursachenden Gene in den Geschlechtschromosomen beruht. Bei den Vögeln erweist dieser Vererbungstyp (wie bei den Schmetterlingen) eine Heterogametie des weiblichen Geschlechts und in Übereinstimmung damit zeigt sich, daß das Weibchen das 1 X-Geschlecht ist; bei den Säugetieren erweist dieser Vererbungstyp eine Heterogametie des männlichen Geschlechts

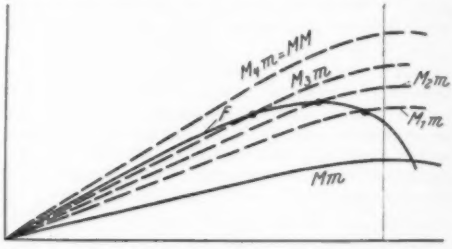

Fig. 1. Graphische Darstellung der geschlechtsbestimmenden Reaktionen bei weiblicher Heterogametie. F—Mm normales ♀; F—MM normales ♂; F—M_1m usw. weibliche Intersexualität.

[1]) Neueste Zusammenfassung des Tatsachenmatrials bei R. GOLDSCHMIDT. Die zygotischen sexuellen Zwischenstufen und die Theorie der Geschlechtsbestimmung. Ergebn. d. Biol. **2**. 1927, die theoretischen Ableitungen in: desgl. Physiologische Theorie der Vererbung, Berlin: Springer 1927.

und in Übereinstimmung damit zeigt sich, daß das Männchen das 1 X-Geschlecht ist. Bei Säugetieren (Schwein, Ziege) und wahrscheinlich bei Vögeln (Huhn) kennen wir echte zygotische Intersexe, also Individuen, deren Erbkonstitution sie veranlaßt, im Laufe der Entwicklung ihr Geschlecht zu ändern. Die Analyse gerade dieses Phänomens bei Schmetterlingen aber hatte ja die Physiologie der Geschlechtsbestimmung aufgeklärt; eine Analyse, die folgerichtig auch auf die parallelen Fälle der höheren Wirbeltiere zutreffen muß. Es liegt also keinerlei a priori Grund vor, daß die höheren Wirbeltiere eine andere Methode der Geschlechtsbestimmung benutzen. Und schließlich, wenn bei diesen Gruppen die Gonaden Sexualhormone produzieren, so müssen ja zunächst dazu die Gonaden, also das Geschlecht, vorhanden sein.

Damit können wir nun in die Betrachtung der Beziehungen zwischen Sexualhormonen und Geschlecht eintreten. Es ist bekannt, daß das Problem ausgeht von den Experimenten über Kastration und Transplantation der entgegengesetzten Keimdrüsen, durch die die äußeren sekundären Geschlechtscharaktere veranlaßt werden, sich in der Richtung des entgegengesetzten Geschlechts umzustimmen unter dem Einflusse der Abwesenheit der richtigen und Anwesenheit nach Transplantation vorhandener entgegengesetzter Hormone. Die Ausbildung der geschlechtsspezifischen sekundären Geschlechtsmerkmale wird also von den betreffenden Hormonen kontrolliert, gleichgültig, welches das ursprüngliche Geschlecht ist. Wollen wir diesen Experimenten und ihrer Deutung nähertreten, so müssen wir uns zunächst einmal klar werden, was sekundäre Geschlechtsmerkmale sind. Solche kommen ja auch all den Tiergruppen zu, bei denen es keine Sexualhormone gibt, so daß jedenfalls keine allgemeingültige Beziehung zwischen beiden bestehen kann. Betrachten wir etwa einen Schmetterling — hier gibt es keine Sexualhormone nach den bekannten Experimenten von OUDEMANS, KOPEC, MEISENHEIMER —, dessen Geschlechter sich durch viele sekundäre Geschlechtscharaktere unterscheiden. Da die Intersexualitätsexperimente gezeigt haben, daß jedes primäre Geschlecht auch die Charaktere des anderen zur Entwicklung bringen kann, so ist die Lage die: Eine bestimmte embryonale Zellgruppe, z. B. die, aus der sich bestimmte Teile des Begattungsapparates entwickeln, besitzt konstitutionell, erblich, die Fähigkeit, sich zu dem unpaaren männlichen Haken (uncus) oder der paarigen weiblichen Legeröhre (Labien) zu differenzieren. Welche dieser alternativen Potenzen in der Entwicklung verwirklicht wird, hängt von dem im betreffenden Moment vorhandenen Geschlechte ab. Man vergleiche die Situation etwa mit der der amphibischen Pflanze Limnophila heterophylla, die an der Luft grobe Luftblätter bildet, unter Wasser aber fein zerschlissene Wasserblätter. Hier entscheidet das äußere Milieu über die Ausführung der in Potenz gegebenen Alternative. Bei der genannten geschlechtlichen Differenzierung entscheidet ein inneres Milieu, das bei den genannten Schmetterlingen durch den geschlechtlichen Zustand in den betreffenden Zellen (s. Kurve 1) gegeben ist. Sekundäre Geschlechtscharaktere sind also solche Merkmale, deren Entwicklung einen alternativen Weg einschlagen kann, je nach dem Vorhandensein weiterer innerer Bedingungen, die durch den geschlechtlichen Determinationszustand der Zellen gegeben ist. (Ob man sich darunter etwas Konkreteres vorstellen kann, gehört nicht hierher; Erörterung in den zitierten Arbeiten des Verf.) Bei den genannten Tiergruppen trifft das Gesagte ebenso auch für die Alternative der Geschlechtsdrüse selbst, Hoden oder Ovar, zu, und genau dasselbe müssen wir auch für die höheren Wirbeltiere behaupten. Hier aber kommt nun für die sekundären Geschlechtscharaktere eine faßbare Bedingung hinzu, die die geschlechtliche Alternative, wenigstens zum Teile, entscheidet, die Anwesenheit der spezifischen Sexualhormone. Dies wird alsbald noch deutlicher werden.

Betrachten wir nun in dem hier verfolgten Zusammenhang die Hauptresultate der Kastrations- und Transplantationsexperimente, und zwar zunächst bei den Vögeln, wo die starke Ausbildung der sekundären Geschlechtscharaktere (Kamm, Sporen, Sichelfedern, Sattelfedern usw. des Hahns) und ihre teilweise periodische Neubildung in der Mauser eine weitgehende Analyse erlaubt hat (Arbeiten von GOODALE, POLL, PÉZARD, CARIDROIT, FINLAY, ZAWADOVSKY usw.). Kastrierte Hühner wie Hennen nehmen ein sexuell neutrales Gefieder an, das aber bei Hennen schon etwas in die Richtung des entgegengesetzten Geschlechts geht. Wird aber außerdem die Geschlechtsdrüse des anderen Geschlechts implantiert, so erfährt das Gefieder eine völlige Umwandlung in den Habitus des anderen Geschlechts; ähnliches gilt für den Kamm. Andere Charaktere, wie Sporen, Körpergröße, Stimme, Eileiter, werden aber durch die Hormonenwirkung der entgegengesetzten Geschlechtsdrüse nur modifiziert, nicht umgestimmt. Bei ihnen ist also die zygotische Konstitution mindestens ebenso entscheidend, wie die Wirkung der Hormone. Es gibt also sekundäre Geschlechtscharaktere, die genau wie das Geschlecht selbst, zygotisch festgelegt sind und durch Wirkungen des inneren Milieus, nämlich der Sexualhormone, gar nicht oder nur wenig modifiziert werden können. Es gibt aber auch geschlechtlich verschiedene Körpereigenschaften, für die während ihrer Entwicklung die Alternative ausschließlich durch dieses Milieu, nämlich die Art der anwesenden Sexualhormone, entschieden wird. Dies letztere ist der Punkt, in dem sich die höheren Wirbeltiere von den niederen Tieren unterscheiden. Der Verfasser hatte nun schon lange[1]) diese Situation auf Grund seiner oben entwickelten Theorie der Geschlechtsbestimmung folgendermaßen interpretiert. Wenn wir die Kurven Fig. 1 nochmals betrachten,

[1]) s. Anmerkung 1, Seite 609, Spalte 2.

die als graphischer Ausdruck der geschlechtsbestimmenden Vorgänge aus den Experimenten an Insekten abgeleitet war, so zeigt sich, daß die weibliche und männliche Reaktionskette beim Weibchen normalerweise keinen Schnittpunkt haben. Theoretisch aber sollten sie nach dem Abschluß der Entwicklung noch einen Schnittpunkt haben, der aber normalerweise nicht erscheint, weil eben die Differenzierung zu Ende ist. Im Experiment (KOSMINSKY, GOLDSCHMIDT) gelingt es aber, den Abschluß der Differenzierung so gegen die Geschlechtsdeterminierungskurven zu verschieben, daß ihr Schnittpunkt noch in die Entwicklungszeit fällt. Der Schnittpunkt bedeutet aber dann Geschlechtsumkehr. Vergleichen wir nun den Augenblick, in dem der Schmetterling aus der Puppe schlüpft, mit dem Ausschlüpfen der Küken aus dem Ei. Der Schmetterling ist mit dem Beginn seines Lebens am Ende seiner Entwicklung angelangt, er ist vollständig fertig; meist legt er seine Eier und stirbt. Das Küken aber hat noch eine beträchtliche Entwicklung vor sich und hat während einer jahre-

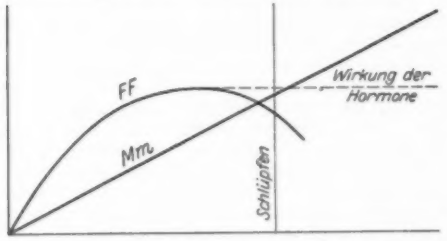

Fig. 2. Graphische Darstellung der zygotischen Geschlechtsbestimmung und Hormonenwirkung bei weiblichen Vögeln.

langen Lebens- und Geschlechtsperiode die Möglichkeit zu vielerlei weiteren Entwicklungsprozessen (Federneubildung, Gonadenregeneration). Wenn somit das Kurvenschema für beide Fälle gälte, so müßte jedes Huhn sich früher oder später — der Schnittpunkt — in einen Hahn umwandeln. Daß dies normalerweise nicht geschieht, so schlossen wir, wird durch die Sexualhormone verhindert, wie dies in graphischer Darstellung so ausgedrückt werden kann wie Fig. 2 zeigt. Seitdem (1920) sind nun zahlreiche Tatsachen bekannt geworden, die zu zeigen scheinen, daß dieser Gedankengang richtig ist. Zunächst sind eine ganze Reihe von Fällen spontaner Geschlechtsumwandlung von Huhn in Hahn bekannt geworden (zuerst durch CREW, dann ZAWADOVSKY, BÉNOIT, RIDDLE). In allen diesen Fällen war der Eierstock durch einen Tumor zerstört worden und aus dem restierenden Keimgewebe war ein Hoden regeneriert. Das Kurvenschema Fig. 2 zeigt, was geschehen war: Sobald die Eierstockshormone wegfallen, tritt der zygotisch bedingte Schnittpunkt ein. Regeneriert jetzt das Geschlechtsdrüsengewebe, so muß es männlich sein. Daß dem so ist, hat auch seitdem das Experiment gezeigt. Wenn nach der Entfernung eines Eierstocks eine Regeneration eintritt, so entsteht ein Hoden. Ja, es konnte gezeigt werden, daß sogar der ganz junge Eierstock, sobald die hemmende Wirkung der weiblichen Hormone durch Transplantation in einen Hahn paralysiert wird, Hodengewebe entwickelt. Sichtlich liegt der Kurvenschnittpunkt also schon am Ende der Embryonalentwicklung.

Noch auf andere Weise ist es möglich, in die Beziehungen zwischen zygotischer sexueller Konstitution und Hormonenwirkung einzudringen, nämlich mit Hilfe des Phänomens des Gynandromorphismus. Früher nannte man alle möglichen Mosaikbildungen, in denen Charaktere beider Geschlechter vereinigt sind, Gynander, eine Bezeichnung, die ebenso wie Hermaphroditen und Pseudohermaphroditen ein Sammelsurium nicht analysierter Erscheinungen darstellte. Heute sind nun daraus zwei scharf umschriebene Erscheinungskomplexe herausgelöst (die übrigens in gewissen Fällen im gleichen Individuum vereinigt sein können) nämlich Intersexualität und echter Gynandromorphismus[1]). Echter Gynandromorphismus, der am häufigsten in Form gehälfteter „Zwitter" vorkommt, wird dadurch verursacht, daß bestimmte Abnormitäten in der Verteilung der Geschlechtschromosomen eintreten, als deren Folge die eine Körperhälfte (oder seltener ein kleinerer Abschnitt) des Individuums die Chromosomenkonstitution des Weibchens, die andere die des Männchens erhält. Somit sind bei einem Gynandromorphen die männlichen und weiblichen Teile genetisch in jeder einzelnen Zelle, verschieden, gerade, als ob man Stücke verschiedenen Geschlechts zusammengeklebt hätte. Dies sind experimentell erwiesene Tatsachen. Nun sind auch bei Vögeln als seltene Abnormitäten Halbseitenzwitter bekannt geworden[2]), die äußerlich auf jeder Körperhälfte das Federkleid des einen oder anderen Geschlechts zeigen und innerlich parallel dazu einen Hoden und einen Eierstock. Das letztere deutet darauf hin daß es sich um echte Gynander genetischer Natur handelt. Nun werden aber ja bei Vögeln die sekundären Geschlechtscharaktere von den Gonadenhormonen beeinflußt, die im Blute kreisen. So ist es unverständlich, daß die Geschlechtscharaktere des Gefieders genau gehälftet erscheinen in Übereinstimmung mit den Gonaden, vorausgesetzt, daß eben überhaupt in diesem Falle die Hormone mitgewirkt haben und nicht primäre wie sekundäre Geschlechtscharaktere rein genetisch bestimmt wurden, wie bei den Insekten. In den letzten Jahren haben nun PÉZARD [nebst Mitarbeitern[3])] versucht, dem Problem experimentell näherzutre-

[1]) Näheres bei GOLDSCHMIDT 1920, 1927, s. Anmerkung 1.

[2]) Der schönste Fall stammt von HEINROTH und POLL.

[3]) Zusammengefaßt bei PÉZARD, SAND, CARIDROIT. Les hormones sexuelles et le Gynandromorphisme chez les Gallinacées. Arch. biol. **36**. 1926.

ten. Ihr Hauptversuch ist der: Ein Huhn wird kastriert und dann die eine Körperhälfte entfiedert. Dann wird ihm ein Hoden implantiert, so daß die Regeneration der neuen Federn unter dem Einfluß der Hodenhormone erfolgt; sie nehmen daher den männlichen Typ an. Wenn die ungerupfte Seite noch nicht gemausert hat, also noch die alten Hennenfedern besitzt, so entsteht ein Vogel mit einem Mosaik männlichen und weiblichen Gefieders. PÉZARD nennt dies experimentellen Gynandromorphismus. Dagegen ist nichts einzuwenden, falls man diesen Begriff noch im alten Sinne als Sammelsurium verwendet. Wenn man aber diesen Begriff für den echten Gynandromorphismus anwendet, bei dem die beiden Körperhälften nicht geschlechtlich verschieden aussehen (Phänotypus!), sondern geschlechtlich verschieden sind (Genotypus!), dann hat der schöne Versuch gar nichts mit dem Problem des Gynandromorphismus zu tun, sondern ist eine sehr hübsche Demonstration der Hormonenwirkung auf das Gefieder, bei der nur einem Teile des Gefieders erlaubt wurde, auf die Hormone zu reagieren. So entstand ein äußerlich einem echten Gynander ähnliches Mosaikkleid, das aber natürlich bei der nächsten Mauser verschwindet. Wenn man nun aus diesen Versuchen eine hormonale Erklärung der echten Gynander bei Vögeln ableiten wollte, so müßte man annehmen, daß sich das Gefieder der einen Körperhälfte allein unter dem Einfluß anderer Hormone gemausert hätte. Abgesehen davon, daß diese Annahme ganz in der Luft hinge, erklärt sie aber auch nicht die Hauptsache, nämlich die Übereinstimmung der inneren Genitalien mit dem äußeren Kleide. Die Gynander sind eben auch hier genetisch. Das Problem, das sie bieten, liegt ganz anders. Im wesentlichen kommen für ihre Entstehung nur zwei Möglichkeiten in Betracht. Die eine ist, daß in diesen Fällen Sexualhormone überhaupt nicht in Spiel getreten sind und der Gynandromorph rein genetisch, wie bei den Insekten, entstand durch abnorme Chromosomenbeschaffenheit. Dagegen scheint die Tatsache zu sprechen, daß kastrierte Vögel, also ohne Sexualhormone, ihre sekundären Geschlechtscharaktere nicht ausbilden. Vielleicht ist eben aber doch ein Unterschied, ob die Wirkung der Sexualhormone unterbrochen wird, oder ob sie nie da waren. Es könnte wohl sein, daß im letzten Falle die zygotische Konstitution, genau wie bei Insekten, ausreicht. Nach RIDDLES Fund gonadenloser Tauben mit normalem Aussehen ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen. Die andere Möglichkeit wäre die, daß die Gonaden des Gynanders Hormone produzieren und daß bei Anwesenheit beider Arten von Hormonen die chromosomal weiblichen resp. männlichen Zellen mit den gleichsinnigen Hormonen nur reagieren. In diesem Falle wäre also die Gynandrie, wie stets, genetisch bestimmt, die sekundären Charaktere aber durch die selektive Hormonenwirkung auf die genetisch differenten Teile. Beide Annahmen sind wohl der experimentellen Prüfung zugänglich, die aber noch nicht vorliegt. Jedenfalls sehen wir auch hier, daß auch bei den Vögeln die zygotische Geschlechtsbestimmung entscheidend ist.

Wenden wir uns nunmehr den Säugetieren zu, deren Sexualhormone ja im Vordergrunde des Interesses stehen, seit Steinach seine bekannten Experimente ausführte [Arbeiten von STEINACH, LIPSCHÜTZ, MOORE, SAND usw.[1])]. Im großen und ganzen liegen die Verhältnisse hier ähnlich wie bei den Vögeln. Auch bei den Säugern kennen wir, wie oben erwähnt, Geschlechtschromosomenmechanismus, geschlechtsgebundene Vererbung und zygotische Intersexualität, so daß kein Zweifel darüber herrschen kann, daß auch hier die allgemeine Theorie der Geschlechtsbestimmung, die oben skizziert wurde, gültig ist. Aus den Kastrations- und Transplantationsversuchen ergibt sich dann im wesentlichen die gleiche Beziehung der Hormonenwirkung zum genetischen Geschlecht wie bei den Vögeln, so daß eine Wiederholung der Ableitungen unnötig ist. Was bisher noch fehlt, sind sichere Fälle der Geschlechtsumwandlung durch Regeneration auf Grundlage der zygotischen Konstitution nach Erlöschen der hemmenden Hormonenwirkung, so daß wir nicht sagen können, ob das Kurvenschema der Fig. 2 (unter Umdrehung der Geschlechter, da bei den Säugetieren das Männchen heterogametisch ist) auch hier gilt. Angaben von KREDIET für Ziegen könnten aber möglicherweise hierhergehören. Ebenso fehlen bisher bei Säugetieren ganz einwandfreie Fälle von Gynandromorphismus, die Schlüsse auf den relativen Einfluß des zygotischen Geschlechtes und der Sexualhormone auf die Ausbildung der sekundären Charaktere gestatteten. (Scheinbare Halbseitenzwitter bei Schweinen konnte CREW durch vergleichende Betrachtung als Intersexe nachweisen mit zeitlicher Verschiedenheit der Geschlechtsumstimmung auf den beiden Körperhälften). Nur eine Tatsachengruppe ist bisher bekannt, die uns in dieser Richtung ein wenig informiert, LILLIES neuere Befunde an den von KELLER und TANDLER und ihm analysierten Verhältnissen der Rinderzwitter oder Zwicken. Bekanntlich ist bei verschiedengeschlechtlichen Rinderzwillingen der eine Partner häufig sexuell abnorm, die sog. Zwicke. Die genannten Autoren haben nun bewiesen, daß die Zwicke ein genetisches Weibchen ist, das durch eine Blutgefäßanastomose mit dem männlichen Zwillingsfetus verbunden war. Da die männliche Keimdrüse zuerst ihre Hormone produziert, gelangen diese in den weiblichen Fetus und stimmen dessen Entwicklung weitgehend in männlicher Richtung um, so daß ein typisches (hormonales) Intersex entsteht. Gäbe es nun bei den Säugetieren keine zygotische Geschlechtsbestimmung, führt LILLIE richtig aus, so müßte die Zwicke sich völlig in ein

[1]) Die neuste durch Klarheit und biologisches Verständnis ausgezeichnete zusammenfassende Darstellung von R. WEISSENBERG. Zeugung und Sexualität. In: Handb. d. Sexualwissenschaft. 3. Aufl. 1926.

Männchen umwandeln. Tatsächlich geht aber die Umwandlung nie über einen bestimmten Punkt hinaus. Der Grund ist eben, daß das entscheidende doch das zygotische Geschlecht ist, zu dem eben als eine Art Verstärkung der Wirkung beim Differenzierungsvorgange noch die Hormone hinzukommen. Ein asexuelles Soma, das erst durch die Hormone sexualisiert wird, wie manche Forscher ohne Berücksichtigung der genetischen Grundtatsachen meinen, gibt es nicht. So kann es auch für die Säugetiere keinem Zweifel unterliegen, daß zygotische Geschlechtsbestimmung und Hormonenwirkung genau wie bei den Vögeln im Verhältnis von Hauptursache und Hilfswirkung stehen.

Wir schließen damit, daß die Verhältnisse der höheren Wirbeltiere mit ihren Sexualhormonen sich einfach als Glied der einheitlichen Kette der geschlechtsdeterminierenden Vorgänge einreihen und daß, richtig verstanden, die allgemeine Theorie der Geschlechtsbestimmung auch diese Organismen umfaßt, deren scheinbare Sonderstellung nur daher rührt, daß sie vorzugsweise von der Vererbungslehre fernstehenden Forschern bearbeitet und mißverstanden wurde.

Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik.

Von P. JORDAN, z. Zt. Kopenhagen.

Vor wenig mehr als einem Jahre erschien in der Zeitschrift für Physik eine kurze Arbeit von W. HEISENBERG: „Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen"[1]). Diese Arbeit lieferte die Grundlagen der heutigen Quantenmechanik, d. h. desjenigen Zweiges der theoretischen Physik, der sich die Aufgabe gestellt hat, die physikalischen Gesetze in der Welt der Quanten und Atome ebenso exakt und vollständig zu erfassen, wie die klassische Physik die Gesetze der makroskopischen Dimensionen zu beschreiben vermochte.

Wie man weiß, hatte PLANCK aus dem Gesetz der Wärmestrahlung Anzeichen dafür entnommen, daß nicht nur in der Materie, sondern auch in der Energie elementare Unstetigkeiten auftreten; und die weiteren Forschungen von PLANCK, EINSTEIN und BOHR hatten es sichergestellt, daß derartige Unstetigkeiten wirklich zu den elementarsten physikalischen Erscheinungen gehören: ein einzelnes Atom vermag nicht kontinuierlich viel verschiedene Zustände anzunehmen, sondern es vermag nur in diskret verschiedenen Zuständen aufzutreten — wofür der STERN-GERLACH-Versuch einen der eindruckvollsten Beweise liefert — und die Zustandsänderungen der Atome geschehen gleichfalls unstetig, sprunghaft. Während nach der klassischen Theorie die im Inneren eines Atoms kreisenden Elektronen dauernd elektromagnetische Wellen ausstrahlen müßten und dadurch stetig Energie verlieren würden, gibt es in Wirklichkeit nur eine mit den Quantensprüngen des Atoms verknüpfte unstetige Energieabgabe, bei der die Lichtenergie als ein gerichtetes Lichtquant abgeschossen wird. Bekanntlich ist man durch die grundlegenden Entdeckungen BOHRS dazu gekommen, nach diesen Gesichtspunkten eine ungeheure Menge experimenteller Erfahrungen qualitativ zu verstehen und in den Hauptzügen auch quantitativ zu beherrschen. Aber man ist sich darüber klar gewesen, daß diese „klassische Quantentheorie" nichts anderes als nur die Vorstufe einer wirklichen exakten Quantenmechanik bedeuten konnte. Es wurden in dieser Theorie in grundsätzlich unschöner und unbefriedigender Weise klassische Vorstellungen mit quantenmechanischen Vorstellungen vermischt: so suchte man z. B., wie man weiß, die Energieen der stationären Zustände eines Atoms und die Frequenzen seines Spektrums so zu berechnen, daß man zunächst die Gesetze der klassischen Mechanik zur Bestimmung der inneratomaren Bewegungen verwandte, und nachträglich durch „Quantenbedingungen" aus der kontinuierlichen Menge klassisch möglicher Zustände die quantentheoretisch möglichen heraussonderte; man mußte weiterhin die unnatürliche Annahme machen, daß die Frequenzen des vom Atom ausgestrahlten oder absorbierten Lichtes nichts zu tun hätten mit den klassisch berechneten Umlaufsfrequenzen der Elektronen im Atom, sondern unabhängig von diesen nach der BOHRschen Frequenzbedingung bestimmt würden. Man konnte leicht überlegen, daß dieses Verfahren, das zwar im Fall des Wasserstoffatoms die richtigen Frequenzen lieferte, notwendig bei verwickelteren Fällen zu in sich widerspruchsvollen Ergebnissen führen mußte. Denn die Wechselwirkung der Atome durch Zustrahlung ist ja nur ein Spezialfall der möglichen dynamischen Wechselwirkungen ihrer Elektronen. Wenn man für diesen Spezialfall einen so ganz unklassischen Verlauf der Wechselwirkung annahm, mußte man darauf gefaßt sein, daß ganz allgemein das feinere Wechselspiel der Elektronen eines Atoms anderen als den klassischen Gesetzen folgen würde. In der Tat hat man in dem Fortschritt der weiteren Entwicklung einerseits immer mehr Beispiele gefunden, bei welchen die nach diesem Rezept erzielten Ergebnisse zwar ungefähr, aber niemals ganz die empirischen Befunde richtig wiedergaben; und andererseits hat man z. B. im Heliumproblem einen Fall gefunden, bei dem die Anwendung dieser halbklassischen Theorie vollkommen versagt. Übrigens hat ja auch die Theorie des Wasserstoffs längst nicht alles geliefert, was man von ihr verlangen mußte: neben den Frequenzen der Spektrallinien sind auch ihre Intensitäten (unter vorgegebenen Versuchsbedingungen) beobachtbare Größen, welche von einer vollständigen Theorie

[1]) W. HEISENBERG (1). — Die eingeklammerten Literaturnummern beziehen sich auf die Zusammenstellung S. 623.

vorausgesagt werden müssen; aber für alle Intensitätsprobleme hat die frühere Theorie statt exakter Aussagen nur ungefähre Abschätzungen zu geben versucht.

HEISENBERG hat in der genannten Arbeit das Problem von seiner gundsätzlichen Seite angegriffen. Er hat sich die Aufgabe gestellt, eine wirkliche quantentheoretische Mechanik zu schaffen, in welcher die Vorstellungen der stationären Zustände und der sprunghaften Zustandsänderungen in ebenso natürlicher und inniger Weise mit den übrigen mechanischen Gesetzen verbunden sind, wie in der klassischen Mechanik die Vorstellung, daß jeder Massenpunkt eine gewisse stetige Bahnkurve im Raume beschreiben müsse, mit den weiteren mechanischen Gesetzen zusammenhängt.

In der Tat hat sich gezeigt, daß HEISENBERG den richtigen Weg zur Lösung dieses Problems gefunden hat. Anschließende Untersuchungen von DIRAC[1]) einerseits und von BORN, HEISENBERG und JORDAN[2]) andererseits konnten in systemascher Fortentwicklung der HEISENBERGschen Gedanken die Grundlagen einer exakten quantentheoretischen Mechanik — die sog. Matrizenmechanik geben. Anwendungen der neuen Theorie, die von diesen Verfassern und von PAULI[3]) und L. MENSING gemacht wurden, ließen es nicht zweifelhaft erscheinen, daß die neue Theorie wirklich in allen Fällen das empirisch Richtige ergab.

Inzwischen erschien eine Arbeit von E. SCHRÖDINGER[4]), in der er, anknüpfend an Vorstellungen von L. DE BROGLIE und EINSTEIN, das quantenmechanische Problem des Wasserstoffatoms behandelte, indem er das korpuskularmechanische Problem der klassischen Mechanik durch ein wellenmechanisches Problem ersetzte. SCHRÖDINGER selbst[5]) sowie PAULI[6]) und ECKART[7]) konnten hernach zeigen, daß dieses SCHRÖDINGERsche Verfahren in einer mathematisch sehr merkwürdigen und unerwartet engen Beziehung zu dem matrizentheoretischen steht: trotz der großen Verschiedenheit beider Theorieen sind sie einander mathematisch völlig äquivalent; und man kann, wenn man ein quantenmechanisches Problem nach der SCHRÖDINGERschen Methode gelöst hat, durch eine einfache Umrechnung daraus die matrizentheoretische Lösung des Problems gewinnen. Man kann also die Matrizentheorie als eine Folgerung der SCHRÖDINGERschen, oder umgekehrt die SCHRÖDINGERsche Theorie als eine mathematische Ergänzung und Vertiefung der Matrizentheorie betrachten.

Aber SCHRÖDINGER hat sich mit dieser mathematischen Vertiefung der Matrizentheorie nicht begnügt: er hat versucht, im Anschluß an seine mathematischen Formeln auch eine neue physikalische Deutung der Quantenmechanik zu entwickeln, die nicht nur zu den HEISENBERGschen Ideen, sondern auch zu den grundlegenden Vorstellungen von PLANCK, EINSTEIN und BOHR im schroffsten Gegensatze steht. Während diese Forscher darauf ausgegangen waren, klassisch nicht verständliche physikalische Unstetigkeiten als vorhanden zu erkennen und ihrer Natur nach zu analysieren, hat es SCHRÖDINGER versucht, die Vorstellung irgendwelcher Unstetigkeiten im Naturgeschehen wieder ganz aufzugeben. Der Übergang von der Korpuskularmechanik zu einer Wellenmechanik sollte nach SCHRÖDINGER genügen, um alle Vorstellungen, wie stationäre Zustände und Quantensprünge überflüssig zu machen und die Physik der Quanten einzuordnen in das System der klassischen, nur mit stetig veränderlichen Größen rechnenden Dynamik. Man kann wohl sagen, daß der große Eindruck, den die SCHRÖDINGERschen Arbeiten auch außerhalb des Kreises der Theoretiker hervorgerufen haben, zum großen Teil eben dadurch bedingt wurde, daß sie die Hoffnung erweckten, daß man die Quantenphysik durch klassisch-anschauliche Bilder vollkommen verstehen könne — während HEISENBERG gerade die Notwendigkeit eines Verzichtes auf klassische Vorstellungen scharf betont hatte. Aber diese quasiklassischen Vorstellungen SCHRÖDINGERS haben bei den übrigen an der Entwicklung der Quantenmechanik beteiligten Verfassern keine Zustimmung gefunden: sie scheinen sich in unauflösbare Widersprüche mit den allgemeinen Gesetzen der Thermodynamik, dem PLANCKschen Strahlungsgesetz und unserer ganzen experimentellen quantenphysikalischen Erfahrung zu verwickeln.

Es soll deshalb in dieser Darstellung ausschließlich die von HEISENBERG begründete Auffassung von der physikalischen Bedeutung der Quantenmechanik erläutert werden — nach der also die SCHRÖDINGERsche Theorie im wesentlichen als eine mathematische Ergänzung der Matrizenmechanik anzusehen ist — und nach der die ganze Quantenmechanik nichts anderes darstellt, als die Erfüllung des Programms, das von BOHR in seinem Korrespondenzprinzip formuliert wurde. Durch die weitere Entwicklung sind aber nicht nur die formalen Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik in allgemeinerer Weise geklärt worden, sondern auch die physikalische Deutung dieser Gesetzmäßigkeiten konnte allgemeiner und bestimmter gefaßt werden, als in den ursprünglichen HEISENBERGschen Aufstellungen. Spezielle Fortschritte in dieser Richtung sind erzielt einerseits durch Untersuchungen von BORN[1]) über die Quantenmechanik von Stoßprozessen und andererseits durch Arbeiten von HEISENBERG[2]) und JORDAN[3]), die sich mit einer

[1]) P. A. M. DIRAC (2).
[2]) M. BORN und P. JORDAN; M. BORN, W. HEISENBERG und P. JORDAN (3).
[3]) W. PAULI jr. (42).
[4]) E. SCHRÖDINGER (4).
[5]) E. SCHRÖDINGER (5).
[6]) W. PAULI jr. (6).
[7]) C. ECKART (7).

[1]) M. BORN (8).
[2]) W. HEISENBERG (9).
[3]) P. JORDAN (10).

genaueren Analyse der Vorstellung der Quantensprünge beschäftigten; endlich ist die allgemeinste und vollständigste physikalische Deutung, die man zur Zeit den formalen quantenmechanischen Gesetzen geben kann, durch zwei Arbeiten von DIRAC[1]) und JORDAN[2]) entwickelt worden[3]).

Gleichzeitig mit der fortschreitenden Aufklärung der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik sind durch eine große Fülle spezieller Anwendungen von verschiedenen Verfassern immer neue Beweise für die empirische Richtigkeit der Theorie geliefert worden. Zu den wichtigsten dieser spezielleren Untersuchungen gehören Überlegungen von HEISENBERG[4]) und DIRAC[5]), welche einerseits die quantenmechanische Bedeutung des sog. PAULIschen Prinzipes der Atomstruktur aufgeklärt und damit die Grundlage für die quantenmechanische Theorie der Atome mit mehreren Elektronen geliefert und andererseits die Einordnung der EINSTEINschen Quantentheorie des idealen Gases in die Quantenmechanik vollzogen haben. In diesem Aufsatz soll versucht werden, einen Überblick über den gegenwärtigen Stand von Grundlagen und Anwendungen der Theorie zu geben.

Es ist jedoch kaum möglich, diesen Aufsatz hinausgehen zu lassen, ohne für ihn (nach Inhalt und Umfang) die besondere Geduld und Nachsicht der Leser zu erbitten. Wenn trotz mancher Umarbeitungen, die er erfahren hat, befürchtet werden muß, daß viele Leser sehr viel des Unverständlichen darin finden werden, so mag es erlaubt sein, zur Entschuldigung auf die wirklichen, sachlichen Schwierigkeiten hinzuweisen, die sich dem Versuch entgegenstellen, die Grundgedanken der heutigen Quantenmechanik einem weiteren Leserkreise näher zu bringen. Diese Schwierigkeiten haben ihren Ursprung nicht nur in dem stürmischen Tempo der Entwicklung, welches in den $1^1/_2$ Jahren des Bestehens der Quantenmechanik unverändert angedauert hat, und in dem immer noch in vieler Hinsicht unabgeschlossenen Charakter der Theorie, sondern auch in allgemeineren Verhältnissen der physikalischen Entwicklung, die in letzter Zeit in mancher Hinsicht die Gedankengänge sogar der Experimentalphysiker und der Theoretiker ziemlich weit auseinandergeführt hat. Der Zustand der theoretischen Physik, der so lange gekennzeichnet war durch eine gänzliche Unsicherheit über die Grundlagen der Theorie (trotz glänzender Erfolge in so vielen Einzelfällen), hat nicht nur die Theoretiker lange Zeit verhindert, zu mathematisch klaren Formulierungen ihrer Ideen zu gelangen, sondern wohl auch die Experimentalphysiker etwas entwöhnt von der Verfolgung mathematisch-physikalischer Überlegungen. Die anschauliche Einfachheit eines Teils der Grundvorstellungen der Quantentheorie (stationäre Zustände, Quantensprünge) hat ermöglicht, daß viele der wichtigsten experimentellen Entdeckungen der letzten zwei Jahrzehnte durchgeführt und ihrer Bedeutung nach verstanden werden konnten ganz ohne Zuhilfenahme mathematischer Begriffe (man denke etwa an die Elektronenstoßexperimente, die Auffindung des metastabilen Heliums, den STERN-GERLACH-Versuch und vieles andere), im schroffsten Gegensatze etwa zu den auf dem Boden schwieriger mathematischer Theorien entstandenen Experimenten von HEINRICH HERTZ. Die endlich eingetretene Stabilisierung unserer quantentheoretischen Erkenntnis wird hoffentlich auch die Wechselwirkung von Experiment und quantitativer Theorie immer enger gestalten.

I. Grundlagen der Theorie.

1. *Klassische Theorie und Korrespondenzprinzip.*

Es wird gut sein, wenn wir, bevor wir uns zur näheren Betrachtung der Quantenmechanik wenden, einen Rückblick werfen auf den Stand der Dinge vor dem Erscheinen der HEISENBERGschen Arbeit. Der wichtigste Gesichtspunkt in der damaligen Lage der Theorie war (neben der Grundvorstellung der quantenhaften Unstetigkeiten) das BOHRsche Korrespondenzprinzip. Man kann den Sinn dieses Korrespondenzprinzips in ganz allgemeiner Weise etwa so erläutern: In makroskopischen Dimensionen gilt, wie man weiß, mit äußerster Exaktheit die klassische Theorie; man muß überzeugt sein, daß trotz der einschneidenden Veränderungen, welche die Theorie erfahren muß, wenn wir uns ins atomare Größengebiet begeben, auch hier noch in vielen Zügen der physikalischen Gesetze Ähnlichkeiten und Anklänge an die klassische Theorie zu finden sind. Die Tatsache der unstetigen Zustandsänderungen steht zwar in einem unversöhnlichen Gegensatz zu allen klassischen Vorstellungsweisen; aber man kann doch diesen Gegensatz in gewisser Weise verwischen, indem man statt einzelner Atome größere Mengen gleichartiger Atome betrachtet: wenn diese Atome zu verschiedenen Zeiten ihre Quantensprünge machen, so wird man angenähert doch eine stetige Zustandsänderung des ganzen Haufens der Atome erhalten; und man muß erwarten, daß für diese angenähert stetige Zustandsänderung wieder formal sehr ähnliche Gesetze gelten, wie in der klassischen Theorie. Man kann in diesem Sinne das später erfüllte Programm der Quantenmechanik etwa so aussprechen: man soll eine Theorie entwickeln, welche bei grundsätzlicher Berücksichtigung der quantentheoretischen Unstetigkeiten noch das größtmögliche Maß von Ähnlichkeit zur klassischen Theorie besitzt.

Die wichtigsten allgemeinen Ergebnisse, welche BOHR und andere Forscher — es mag erlaubt sein, hier von der Aufzählung einzelner Namen

[1]) P. A. M. DIRAC (11).
[2]) P. JORDAN (12).
[3]) [Anmerkung bei der Korrektur. Diese Überlegungen sind in einer im Erscheinen begriffenen Arbeit von W. HEISENBERG wesentlich weitergeführt worden.]
[4]) W. HEISENBERG (13).
[5]) P. A. M. DIRAC (14).

abzusehen — in dieser Richtung gewonnen haben, beziehen sich auf periodische und mehrfach periodische Bewegungen. Wir wollen hier der Einfachheit halber nur an periodische Bewegungen von einem einzigen Freiheitsgrad, also mit einer einzigen Koordinate denken. Diese Koordinate ist also eine periodische Funktion der Zeit. Man kann ihre Schwingung durch harmonische Analyse in ihre harmonischen Komponenten zerlegen; die ganze Schwingung ist eine Superposition dieser rein harmonischen Schwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen), deren jede eine gewisse Amplitude besitzt. Denken wir uns in der klassischen Theorie den so schwingenden Massenpunkt mit einer elektrischen Ladung versehen — als Elektron — so geht von ihm eine Lichtstrahlung in Form einer elektromagnetischen Kugelwelle in den Raum hinaus. Die Lichtstrahlung hat dieselben Frequenzen wie das schwingende elektrische Moment des Systems, und die Strahlungsintensität einer jeden Frequenz ist proportional dem Quadrate der Amplitude der entsprechenden Frequenz in der Schwingung des elektrischen Momentes.

Nach der Quantentheorie gehört aber jede Lichtfrequenz eines Atoms nicht zu einem einzigen Zustand und einer mit diesem Zustand verknüpften periodischen Bewegung, sondern jede Lichtfrequenz gehört zu zwei Zuständen bzw. zu einem sprunghaften Übergang zwischen diesen zwei Zuständen. Trotzdem besteht eine bestimmte Zuordnung zwischen den wirklichen quantentheoretischen Frequenzen des Systems und den Frequenzen des nur angenähert richtigen klassischen Modells: jeder quantentheoretischen Frequenz des Systems entspricht eine klassische Frequenz des Modells. BOHR schloß deshalb, daß auch die quantentheoretischen mittleren Strahlungsintensitäten, die man von einer großen Anzahl gleichartiger Atome erhalten kann, angenähert proportional sind mit dem Quadrate derjenigen klassisch berechneten Amplitude des elektrischen Momentes, welche zu der entsprechenden klassischen Frequenz gehört. Es lag nahe, diese Annahme zu verschärfen zu der Vorstellung, daß es auch in einer exakten Quantenmechanik bestimmte Amplituden für die Schwingungen des elektrischen Momentes eines Atomes geben müsse, daß aber diese Amplituden von vornherein nicht als Amplituden in einem gewissen Zustand, sondern als zu gewissen Übergängen zugeordnete Amplituden angesehen werden müssen, und daß durch diese exakten quantenmechanischen Amplituden des elektrischen Momentes die mittleren Strahlungsintensitäten exakt bestimmt seien. Man hatte danach als empirisch beobachtbare Größen im Atom einerseits die Energieen der verschiedenen Zustände (deren Differenzen man nach der FRANCK-HERTZschen Elektronenstoßmethode messen kann), ferner die Frequenzen der Spektrallinien und endlich die Amplituden des elektrischen Momentes des Atoms (gemessen aus den Lichtintensitäten), und man konnte das Problem der Quantenmechanik so formulieren, daß alle zwischen diesen Größen bestehenden quantitativen Beziehungen aufzudecken und daraus eine Methode zur exakten theoretischen Berechnung dieser Größen gewonnen werden sollte.

Schon vor HEISENBERGS Aufstellungen sind eine Reihe von exakten Beziehungen zwischen diesen exakten quantenmechanischen Größen bekannt geworden, die wir hier kurz betrachten wollen. Die einfachste und wichtigste von ihnen ist die BOHRsche Frequenzbedingung, welche die Frequenzen des Spektrums aus den Energieen der Zustände abzuleiten gestattet. Bekanntlich zeigt sich auch an dieser die tiefliegende Verwandschaft von klassischer- und quantentheoretischer Mechanik: Man kann nämlich in der klassischen Mechanik die Frequenzen des elektrischen Momentes (und damit auch des Lichtes) berechnen, indem man die Energie nach der „Quantenzahl" differenziert. Quantentheoretisch erhält man die Frequenzen nicht durch Differentiation, sondern durch Bildung endlicher Differenzen.

Ein weiteres wichtiges Gesetz ist von LADENBURG[1]) aufgedeckt und später von KRAMERS[2]) und von KRAMERS und HEISENBERG[3]) ergänzt und verallgemeinert worden. Diese Forscher haben nämlich eine exakte quantentheoretische Dispersionsformel angegeben. Wenn man die Zerstreuung einer monochromatischen Lichtwelle durch ein Atom nach der klassischen Theorie berechnet, so erhält man die bekannten Dispersionsformeln, die das Auftreten einer Resonanz anzeigen, wenn die Frequenz des Lichtes mit einer Schwingungsfrequenz des elektrischen Momentes übereinstimmt. Man muß entsprechend erwarten, daß bei der Zerstreuung monochromatischen Lichtes durch ein wirkliches quantenmechanisches Atom eine Resonanz dann auftritt, wenn die Frequenz des Lichtes übereinstimmt mit der Frequenz eines der Quantensprünge, zu denen das Atom befähigt ist, und es handelt sich darum, eine Dispersionsformel anzugeben, welcher eine möglichst große korrespondenzmäßige Ähnlichkeit mit der klassischen Dispersionsformel besitzt, in der aber statt der klassischen Schwingungsfrequenzen die quantentheoretischen Frequenzen und statt der klassischen Schwingungsamplituden die quantentheoretischen Schwingungsamplituden auftreten. Eben diese Aufgabe ist von den genannten Forschern gelöst worden.

Mit der Zerstreuung elektromagnetischer Wellen durch ein Atom hängt aufs engste auch die Energieabsorption eines Atoms aus einem Lichtfelde zusammen. Klassisch kommt ja die Zerstreuung so zustande, daß elektromagnetische Wellen, die über ein Atom hinstreichen, eine neue, der ungestörten Bewegung übergelagerte Schwingung des Dipolmomentes des Atoms erzeugen; ist etwa p^0 das

[1]) R. LADENBURG (15).
[2]) H. A. KRAMERS (16).
[3]) H. A. KRAMERS und W. HEISENBERG (17).

elektrische Moment des ungestörten Atoms, so ist das des gestörten gleich $\mathfrak{p}^0 + \mathfrak{p}^1$ mit dem (bei nicht zu starker Einstrahlung) verhältnismäßig kleinen Zusatzmoment $\mathfrak{p}^1$. Die Streustrahlung geht von diesem Zusatzmoment $\mathfrak{p}^1$ in gleicher Weise aus, wie die spontane Ausstrahlung von dem ungestörten Moment $\mathfrak{p}^0$. Die vom Atom absorbierte Energie ist zu berechnen, indem man die vom äußeren Felde am Atom geleistete Arbeit bestimmt. Zerstreuung und Absorption sind also vollkommen bekannt, sobald man (außer $\mathfrak{p}^0$) das Zusatzmoment $\mathfrak{p}^1$ berechnet hat: Die exakten quantenmechanischen Amplituden dieses Zusatzmomentes werden in der quantentheoretischen Dispersionsformel ausgedrückt durch die quantentheoretischen Frequenzen und Amplituden von $\mathfrak{p}^0$. Für die Absorption ergeben sich danach, wie VAN VLECK[1]) gezeigt hat, die wohlbekannten Wahrscheinlichkeitsgesetze, welche EINSTEIN als notwendig für das thermische Gleichgewicht zwischen gequantelten Atomen und PLANCKscher Strahlung erkannte. In enger Beziehung zur KRAMERSchen Dispersionsformel stehen ferner eine von THOMAS[2]) und KUHN[3]) sowie eine von BORN[4]) aus Korrespondenzbetrachtungen erschlossene exakte quantentheoretische Formel; wir kommen später noch darauf zurück.

Außer diesen allgemeinen Beziehungen sind vor HEISENBERGs Begründung der Quantenmechanik noch einige speziellere quantenmechanische Gesetze in exakter Form erkannt worden, aus denen sich wichtige Anregungen für die Entwicklung der Theorie ergeben haben. Wir meinen die Intensitätsregeln der Multipletts und ihrer ZEEMANkomponenten, für welche die grundlegenden Untersuchungen der Utrechter Schule die empirischen Unterlagen geschaffen haben. Nach der klassischen Theorie bedeutet der ZEEMANeffekt, rein kinematisch betrachtet, nichts anderes als eine gleichförmige Präzession der Atome unter im übrigen unveränderter Beibehaltung ihrer inneren Bewegung. Dieser kinematische Charakter der durch das Magnetfeld veranlaßten Zusatzbewegung drückt sich in sehr einfacher und wohlbekannter Weise in den Intensitäts- und Polarisationsverhältnissen des normalen klassischen ZEEMANtripletts aus. Ganz entsprechend spiegelt sich in den Intensitäts- und Polarisationsverhältnissen des allgemeinen ZEEMANzerlegungsbildes (HÖNL; GOUDSMIT und KRONIG) die quantentheoretische Kinematik einer „gleichförmigen Präzession" wieder. Die Intensitäten der Multipletts (HÖNL und SOMMERFELD; KRONIG; RUSSELL) geben in ähnlicher Weise Kunde von der quantentheoretischen Kinematik eines bereits etwas verwickelteren Bewegungstyps.

[1]) F. H. VAN VLECK (18); vgl. auch M. BORN und P. JORDAN (18).
[2]) W. THOMAS (19).
[3]) W. KUHN (20).
[4]) M. BORN (21).

2. Heisenbergs Ideen zur Quantenmechanik.

Man besaß also schon eine ganze Reihe wichtiger Einsichten in die Natur der exakten kinematischen und mechanischen Gesetze, welche die inneratomaren Bewegungen beherrschen, als HEISENBERG das zentrale Problem angriff, nicht mehr für irgendwelche mehr oder weniger allgemein bedeutsame Einzeltatsachen der klassischen Theorie die exakte Form des quantenmechanischen Analogons aufzuspüren, sondern die Grundgleichungen der Kinematik und Mechanik selbst in die Quantentheorie zu übersetzen. Er sah, daß dasjenige, was man wußte, bereits ausreichend war, um einem hinreichend scharfen Blick eindeutig den Weg zu weisen, der zu diesem Ziele führte.

HEISENBERG hat bei seinen Aufstellungen bewußt den erkenntnistheoretischen Grundsatz angewandt, daß die Aufgabe einer Theorie am Ende nichts anderes sein kann, als die Herstellung von Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen. Nach der klassischen Raumzeitvorstellung kann man sich eine „Bewegung" eines Massenpunktes nicht anders als in einer „Bahn" denken, welche mathematisch beschrieben werden kann, indem die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit t angegeben werden. Aber diese Vorstellung ist (nicht etwa eine aprioristische Denknotwendigkeit, sondern) nur ein Ergebnis langer, uns sehr gewohnt gewordener Erfahrungen. Und diese Erfahrungen beziehen sich auf „Massenpunkte", deren materielle Träger groß genug sind, daß wir sie längs ihrer Bahn sehend und messend verfolgend können. Nichts berechtigt zu der Annahme, daß diese Vorstellungsweise auch dann noch brauchbar sein muß, wenn der „Massenpunkt" ein Elektron im Innern eines Atoms ist, an dem wir eine „Bahn" weder sehen noch mit Maßstäben messen können. Es kann also von einer „Bewegung" der inneratomaren Elektronen im klassischen Sinne überhaupt nicht gesprochen werden, und es ist gewissermaßen nur eine Frage der Terminologie, ob man entweder die Anwendung dieses Wortes hier ganz vermeiden oder seinen Sinn definitionsgemäß so erweitern will, daß es auch für das inneratomare Geschehen — das ja immerhin enge Analogien zur klassischen „Bewegung" besitzt — zu benutzen ist. Die meßbaren Größen im inneratomaren Geschehen sind nicht zeitlich variable Ortskoordinaten, sondern Größen, wie Energien der Atomzustände, Frequenzen, Übergangswahrscheinlichkeiten. Zwischen ihnen hat die Theorie zahlenmäßige Beziehungen herzustellen, und naturgemäß können diese Beziehungen nur in mathematischen Formulierungen festgelegt werden. Man kann nicht verlangen, daß unserer in klassischen Gewohnheiten befangenen Anschauung diese mathematischen Formulierungen sogleich anschaulich verständlich sind; aber unsere Anschauung gewöhnt sich an diese Formulierungen zweifellos ebensosehr wie an die klassischen.

Man kann die Bewegungsgleichung $m\ddot{q}$ = Kraft der klassischen Mechanik für ein System mit

periodischer Bewegung in der Weise zu lösen versuchen, daß man die zu berechnende Koordinate von vornherein als FOURIERreihe nach der Zeit t ansetzt, mit zunächst unbekannten Frequenzen und FOURIERkoeffizienten. Die Bewegungsgleichung ergibt dann ein System von unendlich vielen Gleichungen für diese unendlich vielen Unbekannten. Praktisch ist diese Methode zwar nur in den einfachsten Fällen durchführbar; aber da man gerade für die Frequenzen und FOURIERkoeffizienten das quantentheoretische Analogon kennt, so gibt sie einen naturgemäßen Ansgangspunkt für eine quantentheoretische Verallgemeinerung der Kinematik und Mechanik.

Es wird gut sein, die Verhältnisse an einem einfachen Beispiel genauer zu verfolgen. Wir wollen einen anharmonischen Oscillator mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} = -q - \lambda q^3 \qquad (\lambda \ll 1)$$

betrachten.

Wenn wir nun die Koordinate q ansetzen als eine FOURIERreihe nach der Zeit t mit vorläufig unbekannten FOURIERkoeffizienten und unbestimmter Periode, so erhalten wir notwendig auch für die Beschleunigung $\ddot{q}$ eine periodische Funktion mit FOURIERkoeffizienten, die sofort aus denjenigen von q abzuleiten sind; q^3 wird auch eine periodische Funktion der Zeit mit gleichfalls aus den Koeffizienten von q zu berechnenden harmonischen Komponenten. Unsere Bewegungsgleichung erhält also die Form: FOURIERreihe gleich Null, und diese Gleichung zerlegt sich in unendlich viele Gleichungen für die unbekannte Frequenz und die unbekannten FOURIERkoeffizienten; es muß ja in der verschwindenden FOURIERreihe $m\ddot{q} + q + \lambda q^3 = 0$ jeder einzelne Koeffizient gleich Null sein.

Quantenmechanisch haben wir nach dem früher Gesagten statt der Koordinate q ein System von quantenmechanischen Schwingungsamplituden. Multiplizieren wir q mit der Ladung e des schwingenden Elektrons, so erhalten wir ja in eq gerade das schwingende elektrische Moment des Systems. Wenn wir die Quantenzustände unseres Atoms in irgendeiner Reihenfolge mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 ... numerieren, so gibt es zu jedem Paare n, m von Zuständen eine gewisse Übergangsamplitude. Das ganze System der zu q gehörigen quantenmechanischen Schwingungen können wir darstellen durch ein quadratisches Schema

$$q = \begin{pmatrix} q(00) & q(01)e^{2\pi i\nu(01)t} & q(02)e^{2\pi i\nu(02)t} & \dots \\ q(10)e^{2\pi i\nu(10)t} & q(11) & q(12)e^{2\pi i\nu(12)t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Nach dem Sprachgebrauch der Mathematiker wird ein solches Schema als eine „Matrix" bezeichnet. Hierin sind die Größen $\nu(nm)$ die quantenmechanischen Frequenzen, die also nach der BOHRschen Frequenzbedingung durch $h\nu(nm) = W_n - W_m$ gegeben sind; die imaginären Exponentialfunktionen deuten jeweils eine rein harmonische Schwingung dieser Frequenz an. Zu jeder Schwingung gehört eine Amplitude $q(nm)$; und zwar gehört diese Amplitude zu den Quantensprüngen, die zwischen den Zuständen n, m hin und her fahren. Die Amplitude $q(mn)$ gehört übrigens gleichfalls zu diesen Quantensprüngen; man muß annehmen, daß $q(nm)$ und $q(mn)$ zueinander konjugiert komplexe Zahlen sind: dies ist, wie man leicht einsehen kann, die naturgemäße quantenmechanische Verallgemeinerung der selbstverständlichen Voraussetzung in der klassischen Theorie, daß die Koordinate des Systems eine reelle Funktion der Zeit ist. Was endlich die Matrizenelemente $q(00)$, $q(11)$, betrifft, so sind diese offenbar nicht mit Übergängen des Systems, sondern mit einzelnen Zuständen verknüpft: $q(nn)$ bedeutet den zeitlichen Mittelwert des elektrischen Momentes für den Fall, daß sich das System im n-ten Zustand befindet.

Wir müssen nunmehr überlegen, wie die quantenmechanischen harmonischen Komponenten der Beschleunigung $\ddot{q}$ aus denen von q zu erhalten sind. Naturgemäß erhält man sie ganz einfach durch Differentiation nach der Zeit t; es genügt, zur Erläuterung den ersten Differentialquotienten $\dot{q}$ zu betrachten. Die Matrizenelemente von $\dot{q}$ sind gegeben durch

$$2\pi i\nu(nm)\, q(nm)\, e^{2\pi i\nu(nm)t}.$$

Endlich aber ergibt sich die Frage, durch welche Matrix die klassische Größe q^2 quantenmechanisch zu analogisieren ist. Das Gesetz, nach welchem wir die Matrixelemente von q^2 aus denen von q berechnen, muß natürlich wiederum eine möglichst enge korrespondenzmäßige Ähnlichkeit besitzen mit demjenigen Gesetze, nach dem wir in der klassischen Kinematik die FOURIERkoeffizienten der quadrierten Koordinate q^2 aus denen von q bestimmen. HEISENBERG hat erkannt, wie hier die richtige quantentheoretische Verallgemeinerung lauten muß: q^2 ist aus q zu bilden nach der den Mathematikern wohlbekannten Regel der Matrizenmultiplikation; diese Matrizenmultiplikation übernimmt ganz allgemein in der Quantenmechanik die Rolle der gewöhnlichen Multiplikation in der klassischen Theorie. (Übrigens hat HEISENBERG das Multiplikationsgesetz der quantenmechanischen Größen angegeben, ohne sich dabei der Übereinstimmung dieses Gesetzes mit der Matrizenmultiplikation bewußt zu sein; eben die Übereinstimmung der beiden Multiplikationsgesetze hat später veranlaßt, das quadratische Schema der harmonischen Komponenten von q kurz als Matrix zu bezeichnen.)

Nach den getroffenen Festsetzungen ist man nun wirklich in der Lage, die Bewegungsgleichung $m\ddot{q} + q + \lambda q^3 = 0$ in die Quantenmechanik zu übertragen. Die Matrix der dreigliedrigen Summe ist natürlich so zu bilden, daß man die entsprechenden Elemente der drei Matrizen addiert; und daß die so gebildete Matrix gleich Null sein soll, heißt, daß jedes ihrer Elemente verschwinden muß. Freilich

genügt die so formulierte Bewegungsgleichung noch nicht zur eindeutigen Festlegung von q. HEISENBERG hat als weitere mechanische Grundgleichung noch die früher erwähnte Formel von THOMAS und KUHN herangezogen. An einigen einfachsten Beispielen, die HEISENBERG unter diesen Gesichtspunkten studierte, konnte er nachweisen oder wahrscheinlich machen, daß diese Formulierung wirklich zu vernünftigen Ergebnissen führte, nämlich zur Gültigkeit von Energiesatz und Frequenzbedingung und zur Übereinstimmung mit den an die KRAMERSsche Dispersionstheorie anknüpfenden Formeln.

3. Die Matrizentheorie der Quantenmechanik.

Die Entwicklung einer systematischen Theorie auf der von HEISENBERG skizzierten Grundlage und der Nachweis, daß diese Theorie zur allgemeinen Gültigkeit des Energiesatzes und der BOHRschen Frequenzbedingung sowie zur KRAMERSschen Dispersionsformel (und den daran anknüpfenden Formeln) führt, ist in Arbeiten von BORN und JORDAN[1]), DIRAC[2]), BORN, HEISENBERG und JORDAN[3]) durchgeführt.

Betrachten wir zunächst immer noch ein System von einem einzigen Freiheitsgrade, dessen Koordinate q — klassisch gesprochen — eine periodische Funktion der der Zeit ist. Sie wird also jetzt durch eine Matrix dargestellt.

Die Bewegungsgleichungen müssen zum Zweck der quantenmechanischen Übertragung in der sog. kanonischen Form geschrieben werden:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q};$$

der zu q konjugierte Impuls p wird natürlich gleichfalls als Matrix dargestellt. Die Energiefunktion $H = H(p, q)$ ist durch Multiplikationen und Additionen aus p und q aufzubauen, wobei die Multiplikation definiert ist durch das fundamentale HEISENBERGsche Multiplikationsgesetz. Für diese symbolische Multiplikation gilt nun aber nicht mehr das bei der Multiplikation gewöhnlicher Zahlen ganz triviale „kommutative Gesetz" $pq - qp = 0$. Die mehrfach erwähnte THOMAS-KUHNsche Gleichung besagt gerade, daß die Diagonalglieder der Matrix $pq - qp$ (diejenigen Glieder, bei denen die beiden Indices n, m beide denselben Wert besitzen) gleich $\frac{h}{2\pi i}$ sind; diese Aussage stellt eine weitere Grundgleichung der Theorie dar.

Man kann aus den Bewegungsgleichungen noch eine Verschärfung dieser Beziehung gewinnen: es gilt die „Vertauschungsregel"

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} 1;$$

hierin bedeutet 1 die sog. Einheitsmatrix, deren Elemente in der Diagonale gleich 1 und sonst gleich 0 sind.

Wenn wir absehen von „entarteten" Systemen, bei denen mehrere Zustände die gleiche Energie besitzen, also gewisse Frequenzen $\nu(nm)$ für $n \neq m$ gleich 0 sind, so ist die Aussage, daß eine Matrix a:

$$a = (a(nm)e^{2\pi i \nu(nm)t})$$

eine verschwindende zeitliche Ableitung besitzt: $\dot{a} = 0$, offenbar gleichbedeutend damit, daß a eine „Diagonalmatrix" ist, bei der nur die Diagonalglieder von Null verschieden sind. Man kann nun aus der Bewegungsgleichung und der quantenmechanischen Vertauschungsregel beweisen, daß $\dot{H} = 0$ wird, daß also der Energiesatz

$$H = \text{const.} = \text{Diagonalmatrix}$$

gilt. Auch ergibt sich zwangsläufig die BOHRsche Frequenzbedingung:

$$h\nu(nm) = H(nn) - H(mm).$$

Beim Übergang zu Systemen mehreren Freiheitsgraden entsteht die Aufgabe einer Verallgemeinerung der Vertauschungsregel. Sind $p_k, q_k (k = 1, 2, \ldots, f)$ die Impulse und Koordinaten eines Systems von f Freiheitsgraden, so gilt für je zwei dieser Größen eine gewisse Vertauschungsregel. Man kann sie so aussprechen: Zwei kanonische Größen (Koordinaten, Impulse) die zu zwei verschiedenen Freiheitsgraden gehören, sind stets „vertauschbar" (d. h. ihr Produkt ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren); für jeden einzelnen Freiheitsgrad aber gilt wieder die Beziehung

$$p_k q_k - q_k p_k = \frac{h}{2\pi i} 1.$$

Die einfachste Art eines Systems von mehreren Freiheitsgraden erhält man, wenn man einfach mehrere ungekoppelte Systeme von je einem Freiheitsgrad zusammen als ein System betrachtet; man kann leicht ersehen, daß für dieses System (zu dessen Behandlung die Theorie der Systeme von einem Freiheitsgrad schon ausreicht) wirklich diese „kanonischen Vertauschungsregeln" gelten. Das Fortbestehen dieser Vertauschungsregeln auch bei Vorhandensein irgendwelcher Koppelungen zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden bedeutet also, daß trotz dieser Koppelung in gewissem Sinne die Unabhängigkeit der einzelnen Freiheitsgrade gewahrt bleibt. Damit hängt ein von KRAMERS[1]) bemerkter Umstand zusammen: Bei der Zerstreuung einer Lichtwelle von sehr hoher Frequenz werden sich die Elektronen eines Atoms, wie anschaulich klar ist, praktisch wie freie ungekoppelte Elektronen verhalten müssen. Nimmt man die KRAMERS-HEISENBERGschen Dispersionsformeln als bereits gegeben an, so stellen die kanonischen Vertauschungsregeln gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Elektronen wirklich ein solches Verhalten zeigen.

[1]) M. BORN und P. JORDAN (3).
[2]) P. A. M. DIRAC (2).
[3]) M. BORN, W. HEISENBERG und P. JORDAN (3).

[1]) H. A. KRAMERS (22).

Aus den Bewegungsgleichungen und den Vertauschungsregeln kann dann auch bei mehreren Freiheitsgraden der Energiesatz und die Frequenzbedingung abgeleitet werden. Man kann aber den Beweis auch umkehren: aus den Vertauschungsregeln und aus der Forderung H = Diagonalmatrix ergeben sich die Bewegungsgleichungen als Folgerung. Daraus ist aber sogleich eine weitere Folgerung zu ziehen: wenn statt der Koordinaten q_k mit den zugehörigen Impulsen p_k neue Koordinaten und Impulse Q_k, P_k eingeführt werden, welche gleichfalls die Vertauschungsregeln erfüllen, dann gelten auch für die neuen Q_k, P_k wieder die kanonischen Bewegungsgleichungen. In Analogie zum Sprachgebrauch der klassischen Theorie nennt man deshalb eine Transformation $q_k, p_k \to Q_k, P_k$, bei der die kanonischen Vertauschungsregeln für die kleinen und für die großen Buchstaben gelten, eine kanonische Transformation. Eine solche kanonische Transformation erhält man stets, wenn man ansetzt

$$Q_k = T q_k T^{-1}, \quad P_k = T p_k T^{-1},$$

wo T irgendeine Matrix und T^{-1} die dazu „reziproke" Matrix bezeichnet: $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$. Dieser Ansatz hat sich später immer mehr als von fundamentaler Bedeutung für die Entwicklung der Theorie erwiesen.

Als erste Anwendung der kanonischen Transformationen ergab sich eine Störungstheorie, die sich beschäftigt mit der Untersuchung des Einflusses schwacher Störungskräfte auf ein System, dessen ungestörte Bewegung schon bekannt ist. Diese Störungstheorie, deren Methoden unentbehrlich für die Beherrschung der atommechanischen Probleme sind, führt dann auch zu dem Beweise, daß die KRAMERSsche Dispersionsformel und die weiteren im Zusammenhang mit ihr schon vor Aufstellung der allgemeinen Quantenmechanik durch Korrespondenzüberlegungen gewonnenen Formeln — insbesondere auch die früher erwähnte Formel von BORN — tatsächlich nichts anderes als spezielle Folgerungen der Quantenmechanik sind. Theoretisch wichtig ist endlich ein mathematischer Zusammenhang der an die obige Formulierung der kanonischen Transformationen anknüpfenden Integrationstheorie der quantenmechanischen Bewegungsgleichungen mit der von den Mathematikern vielfach untersuchten sog. Hauptachsentransformation der quadratischen (genauer: hermitischen) Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Dieser Zusammenhang, der bereits in tiefere Probleme der Quantenmechanik hineinführt, ergibt auch vielfache Berührungspunkte mit der später entwickelten SCHRÖDINGERschen Theorie. Freilich geht die Darlegung dieser rein mathematischen Zusammenhänge über den Rahmen unseres Berichtes hinaus.

4. Die Theorie der q-Zahlen.

Die Matrizentheorie der Quantenmechanik, wie sie im vorhergehenden geschildert wurde, ist grundsätzlich ausreichend zur theoretischen Behandlung aller Bewegungen vom periodischen bzw. mehrfach periodischen Typus. Aber man ist doch bei der analytischen Untersuchung solcher Bewegungen sehr beengt durch den Umstand, daß man sich auf solche Koordinaten beschränken muß, die eben periodische Funktionen der Zeit sind, während z. B. eine matrizenmäßige Darstellung der Polarkoordinaten r, φ beim Wasserstoffproblem nicht möglich ist — weil φ (klassisch gesprochen) keine periodische Funktion der Zeit ist; ebenso gibt es im Rahmen der Matrizentheorie kein Analogon zu den klassischen „Winkelkoordinaten", welche bekanntlich in der klassischen Theorie die einfachste Darstellung der Bewegung lieferten. Endlich liegt z. B. die einfachste überhaupt mögliche Bewegung, die geradlinige Trägheitsbewegung, infolge ihres gänzlich aperiodischen Charakters außerhalb des Zuständigkeitsgebietes der Matrizentheorie. Wenn man für die Behandlung periodischer Bewegungen eine größere analytische Bewegungsfreiheit gewinnen und zudem auch die aperiodischen Bewegungen vollständig in die Theorie mit einbeziehen will, so muß man eine wesentliche Verallgemeinerung der HEISENBERGschen Matrizendarstellung quantenmechanischer Größen durchführen. Die oben besprochenen HEISENBERGschen Matrizen sind ja von solcher Art, daß irgendeine Größe, welche, wie z. B. die Energie zeitlich konstant ist, gerade als Diagonalmatrix erscheint. Man kann aber auch andere Arten von Matrizen definieren, bei denen die Diagonalmatrizen eine ganz andere Bedeutung haben. Der Weg zu dieser allgemeineren Darstellung der Theorie ist hauptsächlich durch die fundamentalen Untersuchungen von SCHRÖDINGER gebahnt worden; ihre allgemeine Durchführung hat sie in den schon eingangs erwähnten Arbeiten von DIRAC und JORDAN gefunden. Wir werden später ausführlicher darauf zu sprechen kommen.

Man kann aber eine rein formale Behandlung aperiodischer Systeme usw. sowie vor allem eine Einführung von Winkelvariablen bei dem periodischen System schon mit weniger umfangreichen Hilfsmitteln durchführen. Zu diesem Ende verzichtet man zunächst ganz auf eine matrizenmäßige Darstellung der untersuchten quantenmechanischen Größen und beschäftigt sich lediglich mit den Beziehungen, welche zwischen den mechanischen Größen durch ihre symbolische Addition und Multiplikation hergestellt werden. Man kann dabei die mechanischen Größen gewissermaßen als „hyperkomplexe Zahlen" betrachten, welche — ähnlich wie etwa die Quaternionen — alle gewöhnlichen Rechenregeln mit Ausnahme des kommunitativen Gesetzes der Multiplikation ($ab = ba$) befolgen. DIRAC[1]), dem man die erste Veröffentlichung dieser Methode verdankt, hat für diese Zahlen die Bezeichnung „q-Zahlen" im Gegensatz zu den gewöhnlichen, den „c-Zahlen", eingeführt.

Es mag genügen, die Verhältnisse wieder an

[1]) P. A. M. DIRAC (23).

einem System von einem einzigen Freiheitsgrad zu erläutern. Die Energie W ist eine Funktion $W = H(p, q)$ von p und q; alle diese Größen: W, p, q sind jetzt also nicht als Matrizen, sondern eben als q-Zahlen anzusehen. Ebenso ist auch die Zeit t eine q-Zahl, und für die Größen W und t soll die Vertauschungsregel $Wt - tW = \frac{h}{2\pi i}$ gelten; m. a. W. ausgedrückt sollen also W und t aus p und q durch eine kanonische Transformation hervorgehen. Bei einer periodischen Bewegung kann man durch eine andere kanonische Transformation auch zwei Größen J, w gewinnen, die den klassischen Wirkungs- und Winkelvariabeln entsprechen. Sie erfüllen also gleichfalls die Vertauschungsregel $Jw - wJ = \frac{h}{2\pi i}$; und die Größen p, q sind periodische Funktionen von w mit Koeffizienten, die noch von J abhängen:

$$p = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} p_\tau(J)\, e^{2\pi i \tau w}, \quad q = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} q_\tau(J)\, e^{2\pi i \tau w}.$$

Wenn wir nun zwei solche FOURIERreihen multiplizieren, z. B. das Produkt pq bilden, so erhalten wir

$$pq = \sum_{\tau\sigma} p_\tau(J)\, e^{2\pi i \tau w}\, q_\sigma(J)\, e^{2\pi i \sigma w};$$

klassisch könnten wir dieses unmittelbar umformen in

$$pq = \sum_{\tau\sigma} p_\tau(J)\, q_\sigma(J)\, e^{2\pi i (\tau+\sigma) w},$$

womit wir wiederum eine Reihe des ursprünglichen Typs erhalten hätten. Aber bei den q-Zahlen ist diese Umformung nicht erlaubt, da ja J und w nicht vertauschbar sind. Vielmehr gilt jetzt (wie man leicht beweisen kann)

$$pq = \sum_{\tau\sigma} p_\tau(J)\, q_\sigma(J + \tau h)\, e^{2\pi i (\tau+\sigma) w}.$$

Diese Formel bedeutet aber, wie leicht zu überlegen ist, daß die mit den q-Zahlen definierten FOURIERkoeffizienten sich gerade wieder entsprechend dem HEISENBERGschen Multiplikationsgesetz multiplizieren! Dabei stehen in den obigen FOURIERreihen für p, q auch die richtigen quantentheoretischen Frequenzen. Es sieht zwar so aus, als wenn hier ganz andere, quasiklassische Frequenzen aufträten; aber man kann sich leicht überzeugen, daß die richtigen quantentheoretischen Frequenzen in Erscheinung treten, wenn man q oder p nach der Zeit differenziert.

Die korrespondenzmäßige Verwandtschaft der klassischen und der Quantenmechanik tritt offenbar durch diese Feststellungen besonders deutlich in Erscheinung. Früher hatten wir die HEISENBERGschen Matrixelemente als etwas angesehen, was eine gewisse symbolische Ähnlichkeit mit den klassischen FOURIERkoeffizienten besaß. Jetzt erkennen wir, daß die Einführung der nichtkommutativen Multiplikation genügt, um die Matrixelemente als wirkliche quantentheoretische FOURIERkoeffizienten im strengsten mathematischen Sinne zu erkennen. Man übersieht auch leicht an Hand der q-Zahlformulierungen, daß im Gebiete großer Quantenzahlen (bei relativ kleinem h) klassische und Quantenmechanik in der Tat, wie man erwarten muß, asymptotisch zusammenfallen. Denn die Vertauschungsregel $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ kann ja so ausgespochen werden: p und q verhalten sich zwar nicht exakt klassisch-kommutativ, aber doch beinahe; die Abweichung vom kommutativen Verhalten ist mit h proportional, also nur eine kleine Korrektion: Durch diese kleine Korrektion unterscheidet sich mathematisch die Quantenmechanik von der klassischen.

Die innere Geschlosssenheit, welche die Theorie durch die Einführung der q-Zahlen erhält, zeigt sich auch darin, daß nunmehr die Darstellbarkeit jeder kanonischen Transformation in der Form $P_k = T p_k T^{-1}$, $Q_k = T q_k T^{-1}$ sehr leicht beweisbar wird[1]). Dieser Satz bildet ein charakteristisches Beispiel dafür, daß die mit den q-Zahlen formulierte Quantenmechanik in gewisser Hinsicht nicht etwa komplizierter, sondern im Gegenteil einfacher ist als die klassische Mechanik: In der klassischen Theorie gibt es nämlich gar keine einfache Darstellung, welche ausnahmslos alle kanonischen Transformationen umfaßt. Man kann jedoch aus der obigen Darstellung der kanonischen Transformationen auch wieder andere Darstellungen gewinnen, die eine engere formale Analogie zur klassischen Theorie herstellen. Ferner gewinnt man, wie DIRAC[2]) gezeigt hat, durch die q-Zahlen die Möglichkeit, die relativistische Mechanik eines Massenpunktes in einer hinsichtlich aller vier Koordinaten x, y, z, ict symmetrischen Form darzustellen: während in der ursprünglichen Gestalt der Matrizentheorie in zunächst wenig befriedigender Weise die räumlichen Koordinaten x, y, z als Matrizen, die Zeit t (und ebenso ict) dagegen als eine gewöhnliche Zahl aufgefaßt werden mußte, erscheinen jetzt eben x, y, z, ict alle vier als q-Zahlen, wobei eine sehr elegante Formulierung der mechanischen Gleichungen möglich wird — aus der man jedoch bezüglich der Endergebnisse wieder dasselbe erhält, wie aus dem ursprünglichen matrizentheoretischen Ansatz. Endlich ist zu berichten, daß WENTZEL[3]) in sehr kühner und geistreicher Weise die in der „klassischen" Quantentheorie so erfolgreich bewährte SOMMERFELDsche Methode der komplexen Integration vermittels der q-Zahlen quantemechanisch analogisieren konnte.

Wir haben gesehen, daß nach der q-Zahlmethode die quantenmechanischen FOURIERkoeffizienten abgeleitet wurden als Funktion der Wirkungsvariablen J, die als q-Zahl vorausgesetzt wurde. Um aber die HEISENBERGschen Matrizenelemente oder überhaupt mit empirischen Daten vergleichbare Größen zu erhalten, müssen wir diese FOURIERkoeffizienten als Funktion von

[1]) P. JORDAN (24).
[2]) P. A. M. DIRAC (25).
[3]) G. WENTZEL (26).

Quantenzahlen m, n, also gewöhnlichen c-Zahlen, bestimmen. Das Verfahren, das man nach DIRAC wählt, besteht darin, daß man in den nach der q-Zahlmethode berechneten Funktionen einfach das q-Zahlargument J nachträglich durch gewöhnliche Zahlen ersetzt. Irgendein ähnliches Verfahren müßte natürlich bei jedem Problem angewandt werden, wenn man die Formeln der q-Zahltheorie physikalisch interpretieren will; und solange nicht hierfür allgemeine Prinzipien bekannt sind, bringt es auch nicht viel physikalischen Nutzen, daß man aperiodische Systeme nach der q-Zahlmethode formal behandeln kann. Wir werden später sehen, wie man die hier in der Theorie der q-Zahl offen gelassenen Fragen allgemein beantworten kann.

Es mag aber schon jetzt ein noch besonderer Punkt hervorgehoben werden. Man muß, um aus den FOURIERkoffizienten der q-Zahltheorie die HEISENBERGschen Matrixelemente zu gewinnen, für die Wirkungsvariable J nicht etwa beliebige c-Zahlen, sondern gerade nur vielfache von h einsetzen. Das bedeutet, daß man in der q-Zahlformulierung der Quantenmechanik noch eine besondere „Quantelung" neben den Bewegungsgleichungen und Vertauschungsregeln benötigt. Die Grundlagen der HEISENBERGschen Matrizen waren: Erstens die Matrizendarstellung der mechanischen Größen und die Matrizenmultiplikation; zweitens die kanonischen Vertauschungsregeln. Hier war eine besondere „Quantelung" nicht mehr nötig. Aber in der q-Zahltheorie erscheint diese Quantelung von neuem; und es drängt sich die Überzeugung auf, daß sie einen noch nicht voll erfaßten tieferen physikalischen Sinn besitzen muß.

Diese physikalische Bedeutung der Quantelung ist von SCHRÖDINGER klargestellt worden. Man kann nämlich, wie SCHRÖDINGER gefunden hat, in die exakte Mechanik der Atome noch von einer ganz anderen Seite her, als der bislang betrachteten eindringen. Die Tatsachen, von denen SCHRÖDINGERS Untersuchungen ausgegangen sind, liegen weit ab von dem Ursprung der HEISENBERGschen Gedanken; es mögen deshalb im Folgenden zunächst diesen Tatsachen einige Worte gewidmet werden.

(Schluß folgt.)

Literatur:

1. W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. **33**, 879. 1925.
2. P. A. M. DIRAC, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. A. **109**, 642. 1925.
3. M. BORN und P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **34**, 858. 1925; M. BORN, W. HEISENBERG und P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **35**, 557. 1925.
4. E. SCHRÖDINGER, Ann. d. Phys. **79**, 361. 1926.
5. E. SCHRÖDINGER, Ann. d. Phys. **79**, 734. 1926.
6. W. PAULI jr., brieflich publiziert.
7. C. ECKART, Phys. Rev. **28**, 711. 1926.
8. M. BORN, Zeitschr. f. Phys. **38**, 803. 1926.
9. W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. **40**, 501. 1926.
10. P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **40**, 661. 1926.
11. P. A. M. DIRAC, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. A. **113**, 621. 1927.
12. P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **40**, 809. 1927; **41**, 797. 1927; Göttinger Nachrichten, Mathem.-Phys. Klasse 1926, S. 161.
13. W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. **38**, 411. 1926; **41**, 239. 1927.
14. P. A. M. DIRAC, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. A. **112**, 661. 1926.
15. R. LADENBURG, Zeitschr. f. Phys. **4**, 451. 1921; R. LADENBURG und F. REICHE, Naturwissenschaft **11**, 584. 1923.
16. H. A. KRAMERS, Nature **113**, 673. 1924.
17. H. A. KRAMERS und W. HEISENBERG, Zeitschr. f. Phys. **31**, 681. 1925.
18. F. H. VAN VLECK, Phys. Rev. **23**, 330. 1924; M. BORN und P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **33**, 479. 1925; P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **33**, 506. 1925.
19. W. THOMAS, Naturwissenschaft **13**, 627. 1925.
20. W. KUHN, Zeitschr. f. Phys. **33**, 408. 1925.
21. M. BORN, Zeitschr. f. Phys. **26**, 379. 1924.
22. H. A. KRAMERS, Physica **5**, 369. 1925.
23. P. A. M. DIRAC, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. A. **110**, 561. 1926.
24. P. JORDAN, Zeitschr. f. Phys. **37**, 383. 1926; **38**, 513. 1926.
25. P. A. M. DIRAC, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. A. **111**, 405. 1926.
26. G. WENTZEL, Zeitschr. f. Phys. **37**, 80. 1926.
42. W. PAULI jr., Zeitschr. f. Phys. **36**, 336. 1926.

Zuschriften.

Der Herausgeber bittet, die *Zuschriften* auf einen Umfang von *höchstens* einer Druckspalte zu beschränken, bei längeren Mitteilungen muß der Verfasser mit Ablehnung oder mit Veröffentlichung nach längerer Zeit rechnen.

Für die Zuschriften hält sich der Herausgeber nicht für verantwortlich.

Bemerkung über Atomgewichte und Packungseffekte.

Bekanntlich ist es eine sehr auffallende Tatsache, daß sowohl unter den gewöhnlichen Atomgewichten, als insbesondere bei den Isotopen, wie sie uns durch F. W. ASTON bekanntgeworden sind, die Ganzzahligkeit in überraschender Weise vorherrscht. Die Elemente lassen sich im allgemeinen gruppieren in die geradewertigen, mit der sehr häufig nahezu erfüllten Beziehung $A = 4n$ (A = Atomgewicht, n = ganze Zahl) und die ungeradewertigen mit $4n + n'$, wobei n' am häufigsten gleich 3, seltener 1 oder 2 wird. Dies war ja die Ursache für die Annahme, daß als Bausteine Wasserstoff ($H = 1$) und Helium ($He = 4$) zu gelten haben. Die Elemente mit $A = 4n$ wurden danach geradezu als Multiplen von He angesprochen. Man darf sich aber von solchen Ganzzahlenbeziehungen nicht blenden lassen, sie können auch aus anderen Ursachen zustandekommen und eine Reihe von Gründen sprechen dagegen, daß He-Teilchen in den Elementen der Type $A = 4n$, zumindesten durchwegs, als vorgebildete Bausteine enthalten seien[1]).

Zunächst beziehen sich die Atomgewichtsangaben auf O/16 und nicht auf H; O/16 ist aber eine willkür-

[1]) Diese Gesichtspunkte habe ich bereits 1924 in Diskussionen des Gauvereines Wien der D. Phys. Ges. als auf der Naturforscherges. in Innsbruck vertreten. Vgl. auch „Scientia" 1927. Sie finden sich auch u. a. ausgeführt bei H. PETTERSSON, Mitt. Ra-Inst. 200, Wien. Ber. 1927.

liche empirische Einheit. Da He in dieser Einheit genau A = 4,000 ergeben hat, könnte man sie evtl. rationeller auf He/4 zurückführen, mit der sie praktisch identisch ist und für die sich theoretische Begründungen eher vorbringen lassen. Für H (A = 1,0078) als Basis verschwinden die Ganzzahligkeitsbeziehungen.

Die Vergleichung der Atomgewichte von He und H führte zu der speziellen Anschauung über den beim Kernaufbau auftretenden sog. Packungseffekt. Es ergibt sich nämlich nicht genaue Additivität, es kommt vielmehr der Satz von der Trägheit der Energie in Betracht. Zufuhr oder Abgabe von Energie (ΔE) bedingt eine Massenänderung (Δm) im Ausmaße $\Delta m = \Delta E/c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Aus den Atomgewichten von H (1,0078) und He (4,000) folgt dann, daß beim Aufbau des He-Kernes aus 4 He-Kernen und 2 Elektronen ein Massendefekt von 0,031 Einheiten im Maßsystem der Chemie, d. i. $5{,}15 \cdot 10^{-26}$ g eintritt. Der entsprechende Betrag für ΔE ist $4{,}63 \cdot 10^{-5}$ Erg, was also die bei der Bildung des He-Kernes abgegebene Energie darstellt und zugleich diejenige, die zur Zerlegung in seine Bestandteile erforderlich wäre. Nun ist die uns aus den brisantesten α-Partikeln von RaC′ zur Verfügung stehende Energie $1{,}22 \cdot 10^{-5}$ Erg, bzw. $1{,}40 \cdot 10^{-5}$ Erg aus ThC′. Die Energie dieser Geschosse reicht also offenkundig nicht dazu aus, um α-Teilchen (He-Kerne) in seine Bestandteile zu zerschlagen. Ob ein teilweiser Abbau des α-Teilchen bloß um ein Proton (und evtl. ein Elektron) möglich ist, läßt sich nicht ohne weiteres entscheiden, insbesondere, da beim Auftreffen und Eindringen in einen Fremdkern eines anderen Atomes auch noch Energiebeiträge aus diesen Kernen ins Spiel treten könnten. Jedenfalls scheint der große Packungseffekt dem Heliumkern seine große Stabilität zu sichern, während, wie bekannt, die Energie der α-Teilchen sonst vielfach zur Zertrümmerung größerer Atomkerne hinreicht.

Dächte man sich nun O = 16,000 aus 4 He-Kernen oder C = 12,00 aus 3 He-Teilchen aufgebaut, so müßten diese Stoffe ohne jeden weiteren Packungseffekt zusammenhalten und man sollte erwarten, daß schon ein relativ geringer Anstoß und gewiß Bombardement mit α-Geschossen genügen sollte, um diese Elemente in Heliumbausteine aufzulösen. Gerade das Herausschlagen von α-Teilchen (He) aus derartigen Elementen ist aber nach den Methoden der künstlichen Atomzertrümmerung bisher niemals mit Sicherheit nachgewiesen worden; hingegen gelang es G. Kirsch und H. Pettersson an einer Reihe von Elementen der Type A = 4 n Zertrümmerung unter Emission von Protonen zu erzielen. Da laut obiger Überlegung eine Zerlegung der α-Teilchen in Protonen beim Zusammenstoß mit anderen Atomkernen aus Energiebilanzgründen nicht zu erwarten ist, scheint es ziemlich sicher, daß die Elemente mit A = 4 n auch Protonen als primäre, nicht zu He-Kernen vereinigte Bausteine enthalten müssen. Das Auftreten der Ganzzahligkeitsbeziehung A = 4 n wäre demnach so zu deuten, daß die Packungseffekte für C, O usw. entsprechend auf 12 oder 16 usw. Protonen proportional demjenigen für He (auf 4 Protonen) aufgeteilt erscheinen, ohne daß im Kern vorgebildete α-Teilchen vorhanden zu sein brauchen. Natürlich schließt das nicht aus, daß einzelne α-Teilchen am Aufbau beteiligt sein können, aber es dürften keinesfalls alle Protonen in α-Packungen anwesend sein. Man kann auch daran denken, daß in Analogie zu den periodischen Anordnungen der Elektronen der Atomhüllen zunächst 1 α-Teilchen sich stabilisiert und die übrigen sich in Protonenschalen (evtl. auch gruppiert zu 2 oder 3) darumlagern und daß mit steigender Periode des chemischen Systemes ansteigend eine größere Anzahl von Heliumkernen im Kerninneren eingebaut werden.

Damit rückt die wiederholt diskutierte Frage wieder in den Vordergrund, ob bei den radioaktiven Substanzen die ausgeschleuderten α-Teilchen vorgebildet im Element vorhanden waren, das sie emittiert, oder ob gerade die jeweilige Bildung eines α-Teilchens im Kern Ursache zum Instabilwerden und zum Zerfall des Atomes gibt.

Derartige Anschauungen legen es nahe, dem Packungseffekt *aller* Elemente besonderes Augenmerk zuzuwenden. Leider ist das vorliegende Zahlenmaterial trotz der großen Fortschritte in den Atomgewichtsbestimmungen vorläufig unzureichend, um Schlüsse größerer Tragweite darauf zu bauen. Sie werden insbesondere erschwert durch die Erkenntnisse F. W. Astons über die Existenz von Isotopen, deren Atomgewichte andererseits noch nicht den erwünschten Grad an Genauigkeit besitzen. Immerhin lassen sich vielleicht schon heute einige Fingerzeige gewinnen.

Im folgenden sind zunächst die einheitlichen *Reinelemente* nach dem dermaligen Stand der Kenntnisse zusammengestellt. A ist das Atomgewicht für O = 16,000; N bedeutet die Ordnungs- oder positive Kernladungszahl.

Element	N	A	Zahlenbeziehungen zu N	4 n + n′ n	n′	Element	N	A	Zahlenbeziehungen zu N	4 n + n′ n	n′
H	1	1,00777	N	0	1	Cr	24	52,01	2 N + 4	13	0
He	2	4,000	2 N	1	0	Mn	25	54,93	2 N + 5	13	3
Be	4	9,02	2 N + 1	2	1	Co	27	58,97	2 N + 5	14	3
C	6	12,0024	2 N	3	0	As	33	74,96	2 N + 9	18	3
N	7	14,007	2 N	3	2	Y	39	89,0	2 N + 11	22	1
O	8	16,000	2 N	4	0	In	49	114,8	2 N + 17	28	3
F	9	19,00	2 N + 1	4	3	J	53	126,92	2 N + 21	31	3
Na	11	23,00	2 N + 1	5	3	Cs	55	132,8	2 N + 23	33	1
Al	13	26,97	2 N + 1	6	3	La	57	138,9	2 N + 25	34	3
P	15	31,04	2 N + 1	7	3	Pr	59	140,9	2 N + 23	35	1
Sc	21	45,10	2 N + 1	11	1	Bi	83	209,0	2 N + 43	52	1
V	23	51,0	2 N + 5	12	3						

Darunter sind nun *reine ganze Zahlen* die Atomgewichte für die Ordnungszahlen 2, 8, 9, 11, 23, 39, 83. Für diese Elemente He, O, F, Na, V, Y, Bi wäre also beim Aufbau aus Protonen streng proportionaler Packungseffekt zu dem für Helium anzunehmen.

Größer als die ganze Zahl sind die Atomgewichte für die Atomnummern 4, 6, 7, 15, 21, 24. Für diese Elemente Be, C, N, P, Sc, Cr wäre also ein relativ etwas *kleinerer Packungseffekt* vorzustellen.

Kleiner als die ganze Zahl sind die Atomgewichte für die Nummern 13, 25, 27, 33, 49, 53, 55, 57, 59. Für die Elemente Al, Mn, Co, As, In, J, Cs, La, Pr, wäre demnach relativ ein etwas *größerer Packungseffekt* einzusetzen.

Mit Ausnahme von Al (13) sind also die Abweichungen der Atomgewichte bis zur Nummer 24 positiv, von Nummer 25 aufwärts dagegen durchwegs negativ.

Beachtenwert ist vielleicht auch, daß alle Reinelemente mit negativer Abweichung von der ganzen Zahl ungeradewertig sind.

Betrachten wir weiter diejenigen *Mischelemente*, für welche zur Zeit Isotope sichergestellt sind, wobei die Reihung der Atomgewichtsziffern die Folge der Häufigkeit des Vorkommens angibt (s. folg. Tabelle).

Nur in drei Fällen, für N = 3, 5, 54 stehen ungerade Zahlen an erster Stelle (sind die häufigsten Bestandteile) wenn auch gerade Zahlen vorkommen.

Bloß gerade Zahlen enthalten die Elemente Nummer (10), 18, 20, 26, 30, 32, 38, 40, 52, 56, 58, 60, (68?). Sie besitzen auch nur gerade Werte von N.

N	Element	Isotope	N	Element	Isotope
3	Li	7, 6	36	Kr	84, 86, 82, 83, 80, 78
5	B	11, 10	37	Rb	85, 87
10	Ne	20, (21), 22	38	Sr	88, 86
12	Mg	24, 25, 26	40	Zr	90, 94, 92
14	Si	28, 29, 30	47	Ag	107, 109
16	S	32, 34, 33	48	Cd	114, 112, 110, 113, 111, 115
17	Cl	35, 37	50	Sn	120, 118, 116, 124, 119, 117, 122
18	Ar	40, 36	51	Sb	121, 123
19	K	39, 41	52	Te	128, 130, 126
20	Ca	40, 44	54	X	129, 132, 131 134, 136, 128, 130
26	Fe	56, 54	56	Ba	138, (136?)
28	Ni	58, 60	58	Ce	140, 142
29	Cu	63, 65	60	Nd	142, 144, 146
30	Zn	64, 66, 68, 70	68	Er	164—176 (Band)
31	Ga	69, 71	80	Hg	202, 200, 199, 198, 201, 204.
32	Ge	74, 72, 70			
34	Se	80, 78, 76, 82, 77, 74			
35	Br	79, 81			

Bloß ungerade Isotope haben die Elemente Nummer: 17, 19, 29, 31, 35, 37, 47, 51. Sie haben auch nur ungerade Werte von N.

Geradzahlige und ungeradzahlige Isotope kommen vor in den Nummern: 3, 5, (10?), 12, 14, 16, 34, 36, 48, 50, 54, 80, doch überwiegen die ungeradzahligen nur bei den Nummern 3, 5 und vielleicht 54.

Bei Mischelementen läßt sich der Packungseffekt nur bei genauer Kenntnis des Mischungsverhältnisses beurteilen, was die Erkenntnis erschwert. Bisweilen auftretendes abnormales Verhalten, wie bei Barium, ließe sich aber vielleicht durch ungewöhnlichen Packungseffekt deuten, was gerade in diesem Falle des Homologen zum instabilen Radium von Interesse sein könnte.

So spärlich die Ergebnisse auch sind, so deuten sie doch darauf hin, daß das vertiefte Studium der Atomgewichte, und zwar der Reinelemente, wie der Isotopen, im Zusammenhange mit den Packungseffekten einen Weg weist, auf dem weitere Erkenntnisse für den Kernaufbau möglich sind.

Wien, im Juni 1927. STEFAN MEYER.

Anmerkung bei der Korrektur: Aus einer Anzeige in Nature **119**, 945. 1927, entnehme ich, daß demnächst eine Abhandlung des berufensten Forschers auf diesem Gebiet, F. W. ASTON, erscheinen wird. Man muß seinen neueren, anscheinend viel präziseren Daten und Schlüssen mit größtem Interesse entgegensehen. 10. VII. 1927.

Die chemischen Vorgänge bei der Entstehung der Kohlen.

Zur Bemerkung von H. TROPSCH[1]) zu dem gleichnamigen Aufsatz von H. WEYLAND[2]).

TROPSCH weist in einer Bemerkung zu dem Aufsatz des Verf. darauf hin, daß es unterlassen worden sei, die Arbeit von BRAY und ANDREWS[1]) zu zitieren, die die Theorie von FISCHER und SCHRADER sehr zu stützen geeignet sei.

Die Ergebnisse von BRAY und ANDREWS waren von mir deshalb nicht angeführt worden, weil sie meines Erachtens weder im einen noch im anderen Sinne sehr beweiskräftig sind, und zwar aus folgenden Gründen:

1. BRAY und ANDREWS weisen selbst darauf hin, daß sie mit Pilzen, die besonders Cellulose angreifen, gearbeitet haben, daß sie nun aber Versuche im Gang hätten mit solchen Arten, die ligninzerstörend seien. Auf die also auch ihnen bekannte Bedeutung solcher Arten ist bereits von einer Reihe von Forschern hingewiesen worden und es bleibt nach wie vor eine offene Frage, wie sich die Beteiligung der beiden Gruppen von Organismen quantitativ auswirkt. Es sei aber bemerkt, daß in neuester Zeit KÜRSCHNER[3]), der sich mit der Zerstörung des Holzes durch den typischen Cellulosezerstörer Merulius lacrymans beschäftigt hat, nicht einmal in diesem Falle der Theorie von dem völligen Verschwinden der Cellulose und deren höhermolekularen Abbauprodukten zustimmen konnte.

2. Maßgebend für die Zusammensetzung der Kohlen ist aber unter allen Umständen nicht die Tatsache, daß vom Holz unter günstigen Verhältnissen quantitativ die Cellulose oder das Lignin zerstört werden kann, sondern der Zersetzungsgrad, bei dem die Mikroorganismentätigkeit tatsächlich unterbrochen worden ist, und die chemischen Umwandlungen von diesem Zeitpunkt ab. Es läßt sich aber gar nicht leugnen, daß z. B. bei den Braunkohlen reichlich Cellulose dem Zerstörungsprozeß entgangen ist, auch wenn man nicht an zufällige Anhäufungen von fossiler reiner Cellulose denkt. Daß die in den Braunkohlen noch erhaltene Cellulose bei weiterem Altern auf natürlicher Lagerstätte durch Zersetzung ohne Hinterlassung von kohligen Umwandlungsprodukten verschwinden würde, widerspricht jeder Wahrscheinlichkeit. Die andere Frage aber, ob die alkalilöslichen Körper, die schon bei der Vermoderung des Holzes entstehen und von denen auch TROPSCH annimmt, daß sie zum Teil vom Lignin, zum Teil aber auch von Cellulose stammen, weiterhin in der Weise verändert werden, daß die aus Lignin erhalten bleiben, während die aus Cellulose verschwinden, wie TROPSCH meint, ist bisher weder durch die Versuche von BRAY und ANDREWS, noch meines Wissens durch einen anderen Forscher eindeutig zugunsten der Lignintheorie entschieden worden.

Elberfeld, den 28. Juni 1927.

H. WEYLAND.

[1]) Journ. Ind. and Engin. chem. **16**, 137. 1924.
[2]) Zeitschr. f. angew. Chem. 1927, S. 224.

[1]) Naturwissenschaften **15**, 474. 1927.
[2]) Naturwissenschaften **15**, 327. 1927.

Besprechungen.

OPPENHEIM, PAUL, **Die natürliche Ordnung der Wissenschaften.** Grundgesetze der vergleichenden Wissenschaftslehre. Jena: G. Fischer 1926. VIII, 288 S. Preis geh. RM 12.—, geb. RM 13.50.

Diese Schrift bezweckt, in der Mannigfaltigkeit der Wissenschaften eine übersichtliche Ordnung herzustellen und dadurch Maßstäbe der Vergleichung und auch Einblicke in grundsätzliche Entwicklungsbedingungen der Wissenschaften zu geben.

Die Ordnung geschieht nach graduellen Abstufungen; sie ist eine zweidimensionale, indem die Stufenreihe vom Konkreten zum Abstrakten mit derjenigen kombiniert wird, die zwischen den Gegensätzen „typisch individuell" verläuft; d. h. die Wissenschaften werden danach geordnet, wieweit sie einerseits von den Einzelheiten des Tatsächlichen abstrahieren und wieweit sie ferner das in seiner inhaltlichen Fülle Gegebene schematisch vereinfachen.

Mit dieser Ordnung wird eine andere ebenfalls zweidimensionale Ordnung in funktionale Beziehung gesetzt, welche einer begrifflich genaueren Fassung mehr zugänglich ist: die Ordnung nach dem „Gesetzlichkeits-

grade" einerseits und nach dem „Erklärungsgrade" andererseits.

Bei dem Gesetzlichkeitsgrad einer Wissenschaft handelt es sich darum, in wie weit sich die vorkommenden Begriffe scharf definieren lassen und (was damit zusammenhängt) in welchem Maße ihre Behauptungen in die Form strenger Gesetze gebracht werden können.

Der Erklärungsgrad ist das Maß dafür, wieweit die Wissenschaft systematisch ist, d. h. in wie weit es in ihr ein Verstehen — im Unterschied von einer summativen Beschreibung — gibt.

Je nach dem verschieden hohen Gesetzlichkeitsgrad ist die Art des Verstehens (Erklärens) eine andere, indem bei der Wissenschaft von kleinem Gesetzlichkeitsgrad das intuitive Verstehen, bei den anderen die exakte Begründung überwiegt.

Diese beiden graduellen Unterscheidungen werden nun noch quantitativ bestimmt, indem der Erklärungsgrad als umgekehrt proportional zu der Zahl der notwendigen Grundbegriffe der Wissenschaft und der Gesetzlichkeitsgrad als umgekehrt proportional zu der Anzahl der in den Grundbegriffen enthaltenen Merkmale definiert wird. (Die Proportionalitätsfaktoren werden in bestimmter Weise normiert.)

Aus diesen Bestimmungen wird dann auch — freilich nicht in zwingender Weise — eine quantitative Definition des „Abstraktionsgrades" sowie des „Typisierungsgrades" abgeleitet.

Auf Grund dieser Maßbestimmungen kommt einer jeden Wissenschaft eine Stelle, oder genauer gesagt, ein Gebiet innerhalb der „Wissenschaftsfläche" zu.

Die Entwicklung einer Wissenschaft führt im allgemeinen zu einer Ausdehnung des ihr zugehörigen Gebietes, und zwar nach verschiedenen Richtungen. Es ergeben sich daraus „Spannungen", welche die Ursache von methodischen Streitigkeiten sind.

Oppenheim geht in dem ausführlichsten Abschnitt seines Buches die verschiedenen Wissenschaften durch und führt überall die alten wie die aktuellen methodischen Streitfragen auf solche Kämpfe um den Ort der betreffenden Disziplin auf der Wissenschaftsfläche („Ordinaten- und Abszissenkämpfe") zurück.

Durch diese Auffassung wird der Polemik die Spitze abgebrochen; die einander entgegengesetzten Standpunkte erscheinen als verschiedene an sich gleichberechtigte Betrachtungsweisen, deren Fruchtbarkeit für das betreffende Wissensgebiet sich an der Entwicklung zu erweisen hat, über deren Berechtigung aber im allgemeinen nicht von vornherein entschieden werden kann. Zugleich ergibt sich als der allgemeine Grund der Polemik der Umstand, daß bei jeder Veränderung der Stelle einer Wissenschaft ein jedes Plus in einer Richtung durch eine Einbuße in anderer Richtung (etwa ein Plus an Allgemeinheit durch eine größere Lebensferne) erkauft werden muß.

Wie in seiner Stellungnahme zu den methodischen Streitigkeiten, so betätigt Oppenheim überhaupt in all seinen Ausführungen geflissentlich die Gesinnung der Unparteilichkeit und Toleranz und hält sich grundsätzlich fern davon, irgend eine der verschiedenen Denkweisen in der Wissenschaft (etwa die exakte oder die systematische) als die allein berechtigte oder als die ausschließlich für die Wissenschaft anzustrebende zu erklären. — Die Entwicklung seiner Gedanken führt Oppenheim schrittweise und auf indirektem Wege aus. Erst im letzten Abschnitt des Buches wird die endgültige Ordnung aufgestellt.

Diese Ordnung und ihr begriffliches Fundament mag zu manchen Einwendungen Anlaß geben und man wird auch wohl Zweifel daran hegen, ob gerade hiermit der Nerv des Zusammenhanges und der lebendigen Einheit der Wissenschaft — auf deren Betonung es Oppenheim ankommt — aufgedeckt ist.

Gleichwohl ist in den Ausführungen und den Begriffsbildungen Oppenheims vieles der Beachtung Würdige enthalten. Und vielleicht vermag sein Buch, das aus dem Geiste der Freude an der Wissenschaft und einer umfassenden Vertrautheit mit ihr geschrieben ist, etwas von diesem Geiste auf Leser, die weniger davon besitzen, zu übertragen. R. Courant, Göttingen.

RUSSELL, BERTRAND, **Die Probleme der Philosophie.** Übersetzt von Paul Hertz. Erlangen: Weltkreisverlag 1926. VIII, 140 S. Preis geh. RM 5.25, geb. RM 7.—.

Dieses Buch des gegenwärtig bedeutendsten Denkers der angelsächsischen Welt ist 1911 erschienen und hätte eigentlich längst ins Deutsche übersetzt werden sollen. Jedoch kommt die deutsche Ausgabe auch jetzt noch nicht zu spät, obgleich sich die Ansichten Russells inzwischen fortentwickelt haben. Im Gegenteil, das Studium des kleinen Werkes ist vielleicht gerade durch die Entwicklungsbedürftigkeit seiner Gedanken ganz besonders geeignet, philosophieren zu lehren und die philosophische Besinnung zu fördern. Der verständnisvolle Leser wird selber zu manchem der Denkschritte angeregt werden, die Russell später selbst vollzogen hat. In einem für die deutsche Ausgabe geschriebenen Vorwort weist er auf die Punkte hin, in denen sein gegenwärtiger Standpunkt von dem damals eingenommenen abweicht und gibt die Richtung der Abweichungen an. Wer die Philosophie Russells kennen lernen möchte (und jeder Naturforscher sollte von ihr Kenntnis nehmen), beginnt auch heute noch am besten mit diesem Buche. Denn, wie Russell selbst bemerkt, werden seine späteren Fortschritte am leichtesten verstanden, wenn man sie als Änderungen und Ergänzungen der hier vorgebrachten Theorie betrachtet. Die Methode seines Philosophierens kann kaum hoch genug eingeschätzt werden. Es ist nach meiner festen Überzeugung die Methode der Zukunft, die einzige Methode, durch welche das Leibnizsche Ideal verwirklicht werden kann und wird, die Strenge der Mathematik (Russell ist bekanntlich Mathematiker) in die Behandlung philosophischer Fragen einzuführen. Man kann mit Freuden eine ganze Reihe von Anzeichen dafür konstatieren, daß diese Methode (sie findet ihren reinsten Ausdruck in der Verwendung der symbolischen Logik, die durch Russell und Whitehead eine so entscheidende Vervollkommnung erfahren hat) den ihr gebührenden Platz in der Philosophie sich zu erringen beginnt. Diese Entwicklung zu beschleunigen wäre von größter Wichtigkeit für die wissenschaftliche Weltanschauung. Es ist deshalb zu hoffen, daß das Buch, ebenso wie seine spätere Fortsetzung „Die Erkenntnis der Außenwelt", überall eine weite Verbreitung finde. Es ist in Stoff und Stil von klassischer Einfachheit und Klarheit und zeigt dennoch den Weg in die Tiefe. Das kleine Werk gehört zu den wenigen, die man auch allgemein als eine echte Einführung in die philosophischen Probleme aus voller Überzeugung empfehlen kann. Die Übersetzung ist sehr sorgfältig. M. Schlick, Wien.

LIETZMANN, W., **Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule.** Mathematisches, Psychologisches, Pädagogisches. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1927. 116 S., 53 Abb. und 15 Tabellen. 15×22 cm. Preis geh. RM. 6.—.

Der Verf., bekannt als einer der führenden Schulmänner auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts, stellt in dieser Schrift in leicht verständlicher Form die Bemühungen zusammen, die dahin gehen,

die Erteilung von Schulzeugnissen sozusagen more mathematico zu fundieren. Wer je in der Lage war, derartige Zeugnisse erteilen zu müssen, weiß, daß es sich hier um eines der schwierigsten Probleme der heutigen Schule handelt; er weiß, wie verschieden die Beurteilung der gleichen Leistung nicht nur durch verschiedene Lehrer, sondern sogar durch den gleichen Lehrer zu verschiedenen Zeiten sein kann. Verf. zeigt die Aufstellung von Leistungsdiagrammen und ihre Beziehungen zur Gaussschen Fehlerkurve. Die letzten Abschnitte behandeln den Begriff der Korrelation von Rangordnungen und die Pearsonsche Formel. Praktisch anwendbar dürften die dargestellten Gesichtspunkte nur in der Hand eines mathematisch geschulten Lehrers sein. Es ist nicht daran zu denken, daß etwa künftig einmal die Schulzensuren auf Grund rein rationeller mathematischer Berechnungen aufgestellt werden könnten oder gar sollten. Das wichtigste Anwendungsgebiet der in dem vorliegenden Buche dargestellten Gesetzmäßigkeiten scheint dem Referenten darin zu liegen, daß sie die Möglichkeit geben, einerseits die Art der Zensurerteilung durch den einzelnen Lehrer (Bevorzugung von Extremzensuren oder von Durchschnittszensuren) nachzuprüfen und dementsprechend zu bewerten, andererseits Leistungen verschiedener Klassen in einer zahlenmäßig angebbaren Form miteinander zu vergleichen. Selbstverständlich können die gleichen Gesichtspunkte auch auf die Prüfungszensuren an den Hochschulen angewendet werden. Das Buch sei jedem mathematisch interessierten Lehrer empfohlen. Aber es wird heute, wo die Statistik auch in den Naturwissenschaften eine immer größere Rolle spielt, auch für den Naturwissenschaftler nicht ohne Reiz sein, zu sehen, wie es in gewissem Umfange gelingt, die Statistik auch auf einem wesentlich psychisch bedingten Gebiet in Anwendung zu bringen. Wilh. Westphal, Berlin.

EULER, H. v., **Chemie der Enzyme, II. Teil: Spezielle Chemie der Enzyme. 2. Abschnitt[1]): Die hydrolysierenden Enzyme der Nucleinsäuren, Amide, Peptide und Proteine.** Bearbeitet von Hans v. Euler und Karl Myrbäck. Zweite und dritte vollständig umgearbeitete Auflage. München: J. F. Bergmann 1927. IX, 310 S., 47 Textfiguren, Autorenverzeichnis zum 1. u. 2. Abschnitt. 17 × 24 cm. Preis geh. RM 24.—.

Auch dieser nunmehr erschienene Teil des ganzen Werkes hat als Grundlage Vorlesungen. Sein Erscheinen wird mit Freude von allen für das Gebiet der Enzyme Interessierten begrüßt. Sind doch, entsprechend der Überschrift, in diesem Bande so wichtige Substanzen wie Urease, Tryptase, Pepsin, weiter aber auch Lab und — in einem als Anhang bezeichneten Teil — die Blutgerinnungsfermente abgehandelt.

In dreizehn Kapiteln sind die in Frage kommenden Enzyme, einzeln oder in Gruppen zusammengefaßt, beschrieben. Außer dem, was über Vorkommen, Darstellung, Reinigung, Bestimmungsmethoden, Kinetik usw. der Fermente selbst bekannt ist, gehen die Verfasser stets auch auf die Chemie des Substrates ein.

Bei einem so ungeheuren Gebiet sind die Verfasser naturgemäß sehr oft in erster Linie auf die Literaturangaben angewiesen. Aber gerade deswegen ist es für den Wert des Buches entscheidend, daß die Verfasser in eigener Arbeit so vielfach an der ganzen Entwicklung des Gebietes teilgenommen haben. Auch beim Zitieren fremder Arbeiten geben sie stets ihre eigene Anschauung, drücken sie ihre Kritik an den Ergebnissen aus und bringen Vorschläge, die einer Verbesserung und Weiterentwicklung des Erreichten den Weg ebnen. Diese kritische Sichtung ist auch in der Auswahl dessen, was gebracht wird, zu spüren.

Die Literaturzitate reichen bis ins Jahr 1926. Wichtiges, was erst bei der Korrektur bekannt geworden war, ist gelegentlich durch kurze Hinweise noch aufgenommen. Damit ist erreicht, soweit das bei einem in so rascher Entwicklung begriffenen Gebiet überhaupt möglich ist, daß ein ausgezeichnetes und vollständiges Bild des augenblicklichen Standes der Forschung vorliegt. Und wenn dies Bild auch eine „Momentaufnahme" ist, es enthält so vieles, was man heute schon als dauernde Grundlage und Bestand der Enzymforschung für lange Zeit hinaus ansehen kann, daß man dem Buch im Interesse der Kenntnis und der Erforschung der Enzyme eine recht weite Verbreitung wünscht.

B. Helferich, Greifswald.

HENNEBERG, W., **Handbuch der Gärungsbakteriologie.** 2. Aufl. 2 Bände. Berlin: P. Parey 1926. XV, 602 S. und 180 Textabb. IV, 403 S. und 178 Textabb. Preis geb. RM 68.—.

Der 1. Band dieses großen Handbuches führt den Sondertitel: „Allgemeine Gärungsbakteriologie, Praktikum und Betriebsuntersuchungen, unter besonderer Berücksichtigung der Hefe-, Essig- und Milchsäurepilze." Auf eine Einführung in die Bakteriologie und eine Beschreibung des Mikroskopes und der Laboratoriumseinrichtung folgen allgemeine Vorschriften für bakteriologische Arbeiten und Erklärungen von Abkürzungen und technischen Bezeichnungen. Sodann wird ein Arbeitsprogramm für Praktikanten gegeben, eingeteilt in einen allgemeinen Teil und einen für die jeweiligen Bedürfnisse der verschiedenen Gährungsgewerbe, wie Brennerei, Hefefabrikation usw. spezialisierten. In letzterem werden die Aufgaben behandelt, die den Bedürfnissen der verschiedenen Praktikumsteilnehmer entsprechen. Es folgen die verschiedenen bakteriologischen Maßnahmen, erst die allgemeiner gültigen, dann die in den einzelnen Gärungsgewerben üblichen. Im Anhang werden die Rohmaterialien besprochen.

Im 2. Band mit dem Sondertitel „Spezielle Pilzkunde, unter besonderer Berücksichtigung der Hefe-, Essig- und Milchsäurepilze" werden im Anhang auf 10 Seiten auch die tierischen Schädlinge des Getreides und der Gärungsbetriebe und auf 23 Seiten einige Gärverfahren in der praktischen Ausführung besprochen.

Wie schon aus dem Umfang des Werkes hervorgeht, ist es sehr ausführlich, leider allerdings vielfach mehr breit als klar. Der wissenschaftliche Wert des Buches wird durch allzu zahlreiche Ungenauigkeiten vermindert. Über die Richtigkeit der technischen Angaben kann sich der Ref. kein Urteil erlauben; aber da der Verf. Direktor des bakteriologischen Institutes d. preuß. Versuchs- und Forschungsanstalt für Milchwirtschaft in Kiel ist, darf man ihm wohl die nötige Sachkenntnis zutrauen.

Das Buch soll offenbar auch ein „Praktikum" ersetzen. Wenn man aber versuchen wollte, nach den Anleitungen zu arbeiten, würde man wohl nicht weit kommen. So wird gesagt, man solle die in der Flamme fixierten Präparate 20—24 Stunden, in der Kälte oder kurze Zeit bei Siedetemperatur färben. Bei welchen Farblösungen ist eine so intensive Einwirkung nötig? Es wird nur gesagt, daß die Farblösung in „geeigneter Weise" verdünnt wird, so daß sie „eben undurch-

[1]) Der erste Abschnitt des II. Teiles (Die hydrolysierenden Enzyme der Ester, Kohlehydrate und Glukoside) ist 1922 erschienen.

sichtig" ist. Nichts weiter! Bei der Gramfärbung wird ein Rezept für die Farblösung angegeben, das wohl kaum verwendbar sein dürfte. Weiter heißt es von den gramnegativen Bakterien, daß hierher „bisweilen Proteus, bisweilen alte Fluorescenzkulturen" gehören, während diese Arten doch meist gramnegativ sind. Man könnte noch eine ganze Anzahl ähnlicher Beispiele anführen, so, daß in Bd. II, S. 184 B. coli luftliebend genannt wird, obgleich er in den meisten Nährlösungen ohne O ebenso gut gedeiht wie an der Luft. Auf der nächsten Seite wird der Endo-Agar nur bei Gelegenheit des B. coli mutabile angeführt, ohne den doch eine Erkennung der Kolibakterien in der Praxis kaum durchgeführt werden kann. Auch die Erklärung des Wiedererscheinens der roten Farbe ist nicht richtig, denn dieses wird nicht durch die saure Reaktion bewirkt, sondern stellt offenbar einen Fall des „Abfangens" eines Aldehydes dar. Im übrigen fehlen so gut wie alle chemischen Hinweise und Methoden, ohne die man sich eine „Gärungsbakteriologie" kaum denken kann. Auffallend ist ferner das Fehlen aller Literaturhinweise außer einer Liste der Arbeiten des Verfassers.

Immerhin enthält das Buch so viele, sonst schwer zugängliche Angaben, daß es in manchen Fällen als Nachschlagewerk gute Dienste tun wird.

E. G. Pringsheim, Prag.

WEST, G. S., **A Treatise on the British Freshwater Algae.** New and Revised Edition in Great Part Rewritten by F. E. Fritsch. Cambridge: University Press 1927. XV, 534 S., 207 Fig. und 1 Tafel. 14 × 22 cm. Preis 21 sh.

Mit der Neuauflage dieses Werkes ist eines der wichtigsten algologischen Handbücher der Fachwelt wieder zugänglich geworden. West selbst war es nicht mehr vergönnt eine Neubearbeitung seines Werkes vorzunehmen, doch hat Fritsch mit glücklicher Hand das Werk ganz in seinem Sinne modern um- und ausgestaltet und so die Neuauflage geschaffen, die in vollem Maße dem Rufe der ersten (1904) gerecht wird.

Das Werk bietet zunächst kurze Übersichten über die Geschichte der Erforschung der britischen Süßwasseralgenflora, über ihre Vorkommen und kurze, aber gute Darstellungen zahlreicher Sammel-, Präparier- und Kulturmethoden. Eine sehr gute allgemeine Behandlung wird der Organisation der Algenzelle zuteil.

Der natürlich bei weitem den Hauptteil des Werkes ausmachende systematische Teil berücksichtigt alle Algenklassen von den gefärbten Flagellaten bis zu den Rhodophyceen. Die Behandlung des Stoffes ist derart durchgeführt, daß bei der Besprechung der hohen Einheiten wie Klassen, Reihen usw. möglichst alle in diesen vorkommende Charaktere ± ausführlich abgehandelt werden, so daß die Behandlung der folgenden Einheiten wie z. B. der Gattungen dagegen verhältnismäßig kurz ausfällt. Die Bestimmungsschlüssel führen jeweils bis auf die Gattungen, deren wichtigere Arten zum Teil mit ausführlichen Maßen und Verbreitungsangaben erwähnt werden. Hierbei fehlen trotz knapper Textfassung nicht Hinweise auf kritische Formenkreise, Angaben ökologisch interessanter oder entwicklungsgeschichtlich wichtiger Daten, bei denen es sich zeigt, daß alle nur irgendwie wichtigere Literatur mit hinein verarbeitet worden ist. Das zugrunde gelegte System weicht in mannigfachen Einzelheiten von den sonst üblichen Darstellungen ab. Leider tritt eine nicht konsequent durchgeführte Nomenklatur direkten Vergleichen hier störend entgegen. So sind z. B. Einheiten sehr verschiedenen Grades wie Klassen, Reihen, Gruppen, ja Series und Familien innerhalb einer Reihe mit — — — ales bezeichnet, in anderen Fällen enden Spezies wie Familien gleicherweise auf die allgemein doch nur Familien vorbehaltene Endung — — aceae u. a. m. Im System bilden die Isokonten den Beginn; ihnen sind als vorletzte (6.) Gruppe, vor den Siphonales rangierend, die Conjugatae zugeteilt. Als II. Klasse werden die Heterokonten aufgeführt, denen z. B. Chloramoebales, Heterocapsales, Tribonemaceae und Heterosiphonales (Botrydium) angehören. Die III. Klasse bilden die Chrysophyceen, denen IV. Diatomales, V. Cryptophyceen, VI. Dinophyceen (Peridineen), VII. Chloromonadales, VIII. Euglenineen, IX. (im Text X.) die Rhodophyceen folgen, während die Myxophyceen den Beschluß bilden.

Von bemerkenswerten systematischen Details kann hier leider nur weniges gegeben werden. So werden bei den Chlamydomonadaceen auch Gonium, Eudorina und Pandorina aufgeführt, Volvox dagegen von diesen getrennt bei den Sphaerellaceen behandelt. Als Trennungscharakteristica galten hierbei z. B. die bei Volvox in 2 Schichten differenzierte Zellwand, die Plasmastränge, die regellos verteilten Pyrenoide. Haematococcus ist wie bei Hazen als Sphaerella aufgeführt. Die von Shaw propagierte Aufteilung der alten Gattung Volvox in Copelandosphaera, Merillosphaera, Janetosphaera usw. wird von Fritsch kurz kritisch gestreift und bemerkt, daß sie nicht ganz den natürlichen Verhältnissen entspräche. Die Gattung Prasiola wird unter einer eigenen Familie „Prasiolales" bei den Ulothrichales abgehandelt. Bei den Conjugaten werden die allgemeinen Verhältnisse wie Zellorganisation oder Fortpflanzung sehr eingehend besprochen, was wohl auf Anregungen Nellie Carters zurückzuführen ist. In der Bearbeitung der Heterokonten beansprucht u. a. die saubere Behandlung der Diatomeen Interesse, die hier als Klasse aufgefaßt werden. Der guten Bearbeitung der Rhodophyceen wünschte man einige genauere Verbreitungsangaben, so ist über die Verbreitung von Hildenbrandia rivularis nichts näheres angegeben. Die Darstellung der Cyanophyceen, die den Beschluß des Werkes bildet, ist durch eine klare, übersichtliche Darstellung der zur Zeit wieder stark interessierenden cytologischen Details ausgezeichnet. Bleibt nur noch mitzuteilen, daß Abbildungen und Ausstattung vorzüglich sind.

O. C. Schmidt, Berlin-Dahlem.

HEGI, G., **Illustrierte Flora von Mitteleuropa mit besonderer Berücksichtigung von Deutschland, Österreich und der Schweiz.** Zum Gebrauch in Schulen und zum Selbstunterricht. V. Band, 3. Teil; 97.—99., 100.—102. Lieferung (je 8 RM), 103.—106. Lieferung (10 RM.), Einbanddecke zu Bd. V, 3 : 2 RM. München: J. F. Lehmanns Verlag.

Der 3. Teil des V. Bandes enthält von Lieferung 99 an den Schluß der Primulaceen, bearbeitet von Dr. W. Lüdi-Bern, die Plumbaginaceen von Dr. H. Gams, die Sapotaceen, Ebenaceen, Styracaceen, Symplocaceen, Oleaceen, Loganiaceen, Gentianaceen, Apocynaceen, Asclepiadaceen, Convolvulaceen, Polemoniaceen, Hydrophyllaceen, Boraginaceen, Verbenaceen.

Die vortreffliche Bearbeitung der Primulaceen ist besonders reich an wertvollen kartographischen Darstellungen, die dem Floristen und Pflanzengeographen willkommen sein werden, aber auch bei den übrigen Familien sind dem Text Verbreitungskarten der wichtigsten Arten beigegeben. Bei den Sapotaceen ist auf die Gewinnung und Herstellung der *Guttapercha*, bei den Oleaceen auf Jasminöl, Olivenöl, bei den Eschen auf die Herkunft der *Manna* näher eingegangen. Von allgemeinerem Interesse ist ferner die Darstellung zahlreicher Arznei-, Gift- und Nutzpflanzen bei den Gentianaceen, Loganiaceen, Apocynaceen und Asclepia-

daceen. Bei den Gentianaceen sei besonders auf die treffliche Darstellung der wichtigen Gattung *Gentiana* (Enzian) hingewiesen. Bei den Convolvulaceen ist erwähnenswert die erstmalig hier gegebene Bearbeitung der mitteleuropäischen *Cuscuta*-Arten, deren Unterscheidung und Abgrenzung schwierig ist. Bei den Polemoniaceen wird auf die Einschleppung von *Collomia grandiflora*, deren Ausbreitung in Mitteleuropa und eigenartiges biologisches Verhalten eingegangen.

Die dem Texte beigegebenen, sehr zahlreichen Abbildungen von Wuchsformen, Analysen, Standortsaufnahmen sind vorzüglich. Nicht weniger als 15 farbige Tafeln, gemalt von DUNZINGER, K. HAJEK, E. PFENNIGER, erleichtern das Erkennen der Arten; einige dieser Tafeln sind in dem Bestreben möglichst viele Arten farbig darzustellen, etwas überladen, was die künstlerische Wirkung etwas beeinträchtigt.

Bei einem Werke, das sich doch nicht nur an den botanischen Systematiker, sondern an weitere Kreise, besonders an Schulen, Mediziner, Pharmazeuten u. a. wendet, sind die bei manchen Gattungen und Arten vorgenommenen *Umtaufungen* oder Wiedereinführungen älterer Namen an Stelle der in Deutschland eingebürgerten und in die Floren, Lehr- und Schulbücher übergegangenen, wie: *Primula acaulis L.* in *P. vulgaris* Huds., *P. officinalis* in *P. veris*, *Douglasia* Lindl. in *Gregoria* Duby, *Armeria* Willd. in *Statice* L. p. p., *Limnanthemum nymphaeoides* Lk. in *Nymphoides peltata* (Gmel.) O. Ktze., *Cicendia* in *Microcala*, *Chlora* in *Blackstonia*, *Erythraea* in *Centaurium*, *Pleurogyne* in *Lomatogonium* nicht recht zu billigen, da sie dem Laien das Zurechtfinden in dem Werke erschweren.

Manchen dieser Umtaufungen ist bei strenger Befolgung der Nomenklaturregeln eine gewisse Berechtigung wohl nicht abzusprechen, wenn es auch bei den Primulaceen empfehlenswerter gewesen wäre, die in der Bearbeitung von PAX im „Pflanzenreich" festgelegte Nomenklatur zu befolgen und bei den anderen Familien das Erscheinen monographischer Bearbeitungen abzuwarten.

Die Bearbeitung der vielen floristisch, pflanzengeographisch, systematisch und biologisch wichtigen Familien dieses in Darstellung und Ausstattung vortrefflichen, stattlichen Bandes wird weitesten Kreisen sehr willkommen sein und als zuverlässiger Führer und Berater dienen, zumal eine zusammenhängende Darstellung vieler in dem Bande enthaltener Gruppen der Flora Mitteleuropas bisher fehlte.

E. ULBRICH, Berlin-Dahlem.

LUCANUS, FRIEDRICH VON, **Naturdenkmäler aus der deutschen Vogelwelt.** (Naturschutz-Bücherei, hersg. von WALTHER SCHOENICHEN, Bd. 5). Berlin-Lichterfelde: Hugo Bermüller 1926. VIII, 144 S. Preis geh. RM 2.50, geb. RM 3.75.

Der Gedanke der Naturdenkmalpflege hat glücklicherweise in der Seele unseres Volkes schon so tief Wurzel gefaßt, daß es sich erübrigt, hier näher auf ihn einzugehen. Überall ist die Tierwelt im Abnehmen, aber gerade bei uns in Deutschland, wo man bestrebt ist, jeden Quadratmeter Landes auszunützen, hat in den letzten Jahrzehnten das Vogelleben recht fühlbar abgenommen. Die Schrift soll dazu beitragen, unsern gefiederten Freunden noch mehr Schützer und Pfleger zu werben! Darüber hinaus aber regt das Büchlein an zu eignem Nachdenken, zum Weiterforschen. Es erzählt von Wesen, Nist- und Wandergewohnheiten der bei uns selten gewordenen Vögel, beantwortet aber auch die Frage, wie denn eigentlich die Farbe auf den Vogeleiern und der Glanz auf den Federn entsteht. Keine trockene Darstellung erwartet den Leser, sondern ein aus Liebe zur Natur, aus Freude an der Vogelwelt entstandenes Buch. G. WEISSHUHN, Berlin.

BURKITT, M. C., **Our early ancestors.** An introductory study of Mesolithic, Neolithic and Copper Age cultures in Europe and adjacent regions. Cambridge: University Press 1926. XII, 243 S. und 31 Taf. 13×19 cm. Preis sh. 7/6.

Die zwischen dem Palaeolithicum und der Bronzezeit liegenden Perioden haben wie keine andere vorgeschichtliche Epoche im letzten Vierteljahrhundert eine enorme Mehrung des Beobachtungsmaterials erfahren. Eine Fülle von Problemen ist damit aufgetaucht, deren Lösung unser Wissen über die kulturellen und ethnischen Verhältnisse jener frühen Menschheitsepoche beträchtlich zu erweitern verspricht. Das Studienmaterial ist freilich über sehr viele große und kleine Museen verstreut und die einschlägige wissenschaftliche Literatur ist bereits außerordentlich vielseitig, dabei aber so stark zersplittert, daß es schwer fällt über die großen Zusammenhänge sich zu orientieren und daß jeder, der sich mit dem Stoff näher beschäftigen will, Gefahr läuft, in dem Gewirre von Einzelheiten den großen Faden zu verlieren. Die Schwierigkeiten einer Synthese sind freilich sehr groß und mit Recht stellt der Verf. an die Spitze seiner Vorrede den Satz: „Es ist weit leichter einen Leitfaden der paläolithischen als der neolithischen Zeit zu schreiben." BURKITT hat sich seiner Aufgabe mit Geschick entledigt und es verstanden, die großen Kulturlinien herauszuheben und ihre Beziehungen zueinander aufzuzeigen. Zu diesem Zweck bietet er einen Überblick über die Formen der neolithischen Kulturen (Mesolithicum und früheste Bronzezeit sind nur skizzenhaft behandelt), wie sie sich in Ackerbau und Viehzucht, Wohnweise und Bestattung, Kunst und Handwerk ausprägen. Er streift hierbei die schwierige Frage der Kulturkreise und Rassen und knüpft erst daran eine knappe Typologie der Kleinfunde. Die Betrachtung der gesamten neolithischen Kultur unter dem Gesichtspunkte ihrer örtlichen Verbreitung und Ausprägung schlägt dann die großen Bögen, die das Gemeinsame und das Trennende der einzelnen neolithischen Kreise klar hervortreten lassen. Hierbei muß es freilich als ein sachlich nicht berechtigtes Zugeständnis an die englische Leserwelt hingenommen werden, wenn Englands Mesolithicum, Neolithicum, und früheste Bronzezeit in einem eigenen Kapitel vorgeführt wird. Bei aller Beschränkung auf das Wesentliche wäre es in dem als Einführung gedachten Buch zweckmäßig gewesen, an gegebener Stelle die Namen der kleineren Kulturgruppen (z. B. Schussenrieder, Eberstadter, Jordansmühler Typus) vollständig aufzuführen, da erfahrungsgemäß der Nichteingeweihte mit diesen in der Literatur immer wieder begegnenden Benennungen nichts anzufangen weiß. Wenn manche Behauptung aufgestellt ist, der man nicht bedingungslos Gefolgschaft leisten kann, so darf dies bei einem so umfangreichen und vielfach noch ungeklärten Stoff nicht wundernehmen und den Wert des mit manch anregender Beobachtung ausgestatteten Buches nicht mindern. FRIEDRICH WAGNER, München.

Aus den Nachrichten der Mathematisch-physikalischen Klasse der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.

Geschäftsjahr 1926/1927 (vom 1. April 1926 bis 31. März 1927).

(Vorsitzender Sekretär: H. THIERSCH; Sekretär der Math.-physik. Klasse: H. STILLE).

A. WINDAUS und G. SCHWARTE, **Über Digitoxose und Anhydro-digitoxose.** (Vorgelegt durch A. WINDAUS am 16. II. 1926.) Das beim Erhitzen des Digitoxins entstehende krystallisierte Sublimat besitzt die Formel $C_6H_{10}O_3$, es ist eine Anhydro-digitoxose vom Charakter des Glucals. Bei der Oxydation mit Benzopersäure liefert die Anhydro-digitoxose eine noch unbekannte Methylpentose. Einige Derivate der Digitoxose, vor allem der Digitoxit, werden beschrieben.

O. MÜGGE, **Über die sog. Variolite des Oberharzer Diabaszuges.** (Vorgelegt am 2. VII. 1926.) Es wird gezeigt, daß die weißen Flecke dieser Gesteine, die zu ihrer *Verwechslung mit Varioliten* Veranlassung gegeben haben, sehr wahrscheinlich aus Prehnit bestehen. dessen feinkörnige Aggregate den Plagioklas pseudomorphosieren. Das Eigentümliche ist, daß diese Pseudomorphosierung auf kleine von einander getrennte Gebiete von $^1/_8$—4 mm Durchmesser beschränkt ist, die sich zugleich dadurch auszeichnen, daß in ihnen die sonst durch Chlorit dunkelgrüne Grundmasse völlig entfärbt ist. Die Ursache dieser *Lokalisierung der Umwandlung* konnte nicht mit Sicherheit ermittelt werden. — Da *„Fleckendiabase"* dieser sonst nicht bekannten Ausbildung auch am Acker auftreten, ist es wahrscheinlich, daß diese ebenfalls *nicht*, wie bisher angenommen, *silurisch, sondern* wie die des Oberharzer Zuges *unterculmisch* sind. Dies wird bestätigt durch den Nachweis *unterculmischen, nicht silurischen*, Alters auch für die petrographisch den Schichten des Acker ähnlichen Sedimente des *Kellerwaldes* durch HERM. SCHMIDT.

W. BILTZ, Hannover, **Zur Kenntnis des Volumgesetzes der festen Stoffe.** (Vorgelegt in der Sitzung vom 16. VII. 1926.) Die Kenntnisse von der Raumbeanspruchung krystallisierter Stoffe sind seit 1923 vom Vortragenden in Gemeinschaft mit einer größeren Zahl von Mitarbeitern ergänzt worden. Die statistische Auswertung des jetzt vorliegenden Versuchsmaterials führt zu einer Renaissance eines 1840 von H. SCHRÖDER ausgesprochenen Additivitätsatzes, „wonach die Elemente in den Verbindungen in ungleichen Zuständen existieren, so daß ihr Volumen im Verhältnis ganzer Zahlen veränderlich ist". Wie die jetzige Erfahrung schließen läßt, gilt dies nur als *Grenzgesetz beim absoluten Nullpunkt*; die Summanden, aus denen sich die Volumina v_0 der tieftemperierten festen Stoffe zusammensetzen, erwiesen sich als die Nullpunktsvolumina der Bestandteile v_0 oder als deren durch Quotienten ganzer Zahlen n, m auszudrückende Multipla:

$$v_0 = \sum \frac{n}{m} v_0 .$$

Es wird erörtert, wie die Volumina fester Stoffe bei Temperaturen nahe dem Nullpunkte ermittelt werden können; für viele Stoffe und manche Vergleiche genügen bereits Messungen bei Zimmertemperatur. Zur Prüfung kamen Verbindungen höherer Ordnung (u. a. Ammoniakate, Hydrate, Doppelverbindungen); ferner einfache Verbindungen (u. a. intermetallische Verbindungen, Hydrite, Boride, Silicide, Carbide, Sulfide, Halogenide, Oxyde). Zur Erörterung der Frage der Ganzzahligkeit eignen sich Oxyde, Verbindungen der Alkali- und Erdalkalimetalle und die vom Vortragenden mit E. BIRK aufgefundenen, sog. gleichräumigen Verbindungen. Eine Überlagerung des Grenzsatzes durch Wirkungen zweiten Grades tritt besonders in Abhängigkeit vom Sättigungszustande der Verbindungen und bei Modifikationsänderungen in regelmäßiger Weise zu Tage. Für die Prüfung eines Zusammenhanges der Raumbeanspruchung der Teilhaber von dem Energieinhalte ihrer Verbindungen ist die Gitterenergie zuständiger, als die Bildungswärme. Die Ursache der genannten Gesetzmäßigkeit bleibt vorerst unbekannt; eine gewisse Erläuterung geben Gitterstrukturen gleichräumiger Verbindungen. Die Prüfung des Volumsatzes mit organischen Stoffen zeigt u. a., daß in solche Wasserstoff mit der Hälfte seines Nullpunktvolumens eingeht und daß in aliphatischen Verbindungen der Kohlenstoff den Raum des Diamanten, in aromatischen den des Graphits beansprucht.

H. BOHR und O. NEUGEBAUER, **Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite.** (Vorgelegt durch R. COURANT am 16. VII. 1926.) Beweis der Tatsache, daß solche Differentialgleichungen fastperiodische Lösungen besitzen.

E. ARTIN und B. L. VAN DER WAERDEN, **Die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen.** (Vorgelegt durch R. COURANT am 30. VII. 1926.) Grundlegende Sätze der Idealtheorie werden für einen bisher noch nicht erledigten Fall bewiesen.

E. NOETHER, **Der Endlichkeitssatz der Idealtheorie endlicher linearer Gruppen der Charakteristik.** (Vorgelegt durch R. COURANT am 30. VII. 1926.) Im Anschluß an die vorige Arbeit wird ein klassisches Resultat von HILBERT verallgemeinert.

G. BIRCKHOFF, **Über gewisse Zentralbewegungen dynamischer Systeme.** (Vorgelegt durch R. COURANT am 30. VII. 1926.) Anwendung topologischer Methoden auf allgemeine Klassen dynamischer Probleme.

ALFRED KÜHN, **Über die Änderung des Zeichnungsmusters von Schmetterlingen durch Temperaturreize und das Grundschema der Nymphalidenzeichnung.** (Vorgelegt am 30. VII. 1926.) Für eine Anzahl von Tagfaltern wurde die sensible Periode während der Puppenzeit bestimmt, in der Änderung des Zeichnungsmusters durch Temperaturreize hervorgerufen werden können. Bei Argynnis paphia wurde festgestellt, daß für einzelne Gruppen von Zeichnungselementen auf demselben Flügel verschiedene sensible Perioden bestehen. Dabei zeigt sich, daß dieselben Zeichnungselemente, die sich in ihrer Abänderung bei der Artbildung als zusammengehöriges Zeichnungssystem erweisen, auch im Temperaturexperiment gemeinsam modifiziert werden.

E. WIECHERT, **Bemerkungen über die anomale Schallausbreitung in der Luft.** (Gehörig zu den „Forschungsarbeiten über Sprengungen, unterstützt durch die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft".) Zweite Mitteilung S. 93—103, dritte Mitteilung S. 201 bis 211. (Vorgelegt am 29. X. 1926 bzw. 11. II. 1927.) In seiner ersten Mitteilung (Nachrichten der Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, 1925, S. 49—69) folgerte der Verfasser aus den vorliegenden Beobachtungen, daß

die „anormalen" Wellen, die nach der „Zone des Schweigens" zur Erde herabkommen, in ihrem ganzen Bereich die Scheitelhöhe zwischen 30 und 40 km Höhe finden. Dort muß eine Besonderheit in der Beschaffenheit der Stratosphäre vorhanden sein, welche die Schallgeschwindigkeit bis über ihren Wert am Erdboden erhebt. Bestimmte Annahmen über die Verteilung der Schallgeschwindigkeit, die versuchsweise gemacht wurden, führten den Verfasser zu folgender Übersicht:

C = 0, 6, 10, 15, 20 °
L = 247, 215, 189, 160, 137 km.
L/T = 299, 294, 288, 280, 271 m/sec.

C ist der Neigungswinkel der Schallstrahlen am Erbdoden, L die Entfernung vom Schallherd, T die Laufzeit, L/T die „Überführungsgeschwindigkeit". Für den besonderen Fall der Anordnung der Schallgeschwindigkeit, auf den sich Rechnung und Tabelle beziehen, wird der obere Grenzwert von C, also der untere Grenzwert von L, und so die Grenze der Zone des Schweigens bestimmt durch den Grenzwert der Schallgeschwindigkeit, den man für die Höhe der Stratosphäre annimmt. — In der zweiten Mitteilung werden Beobachtungen beschrieben, die von Göttingen aus — in Göttingen und in 3 Außenstationen — am 26. VI. 1926 gewonnen wurden. Es fanden Sprengungen bei Jüterbog (südlich Berlin) statt, angeordnet von der „Sprengkommission" der „Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft". Die Beobachtungen (für L = 171, 215, 255 km West, 215 km Ost) stimmen sehr gut mit den angegebenen Rechnungsergebnissen zusammen, wenn die Konstanten angemessene, geringfügige Änderungen erfahren. Die beiden Gegenstationen fügige Änderungen erfahren. Die beiden „Gegenstationen" (215 km West und 215 km Ost) geben nahezu gleiche Werte für T und L/T (L/T = 291 und 297 m/sec), zum Zeichen, daß der Wind, der fördern und hemmen kann, nur wenig mitwirkte. — In der dritten Mitteilung werden weitere Beobachtungen am 28. I. und 2. II. 1927 hinzugenommen, welche es unter Benutzung von Gegenstationen ermöglichen, die Windwirkung zu erkennen und zu eliminieren. Der Verfasser verwertet nun auch französische Beobachtungen einer Sprengung am 25. V. 1924 bei La Courtine. Um die Windwirkung zu eliminieren, werden die Beobachtungen der Gegenstationen zu einem Mittel vereinigt. Durch rechnerische Reduktion auf L = 200 km ergibt sich folgende Übersicht:

Jahreszeit	Sprengherd	Richtungslinie	L/T
28. I.	Munsterlager	N—S	290 m/sec
2. II.	Munsterlager	N—S	286 „
25. V.	La Courtine	W—O	286 „
26. VI.	Jüterbog	WSW—ONO	291 „

Die Übereinstimmung der Zahlen für L/T ist bemerkenswert und deutet, wie früher vom Verfasser besprochene Beobachtungen, auf eine große Gleichförmigkeit der Erscheinung.

In bezug auf die Ursache der Erhöhung der Schallgeschwindigkeit in der Stratosphäre nach oben hin, folgert der Verfasser, daß die VON DEM BORNEsche Annahme einer relativ wachsenden Beimischung eines leichten Gases (Wasserstoff) nicht ausreicht. Es muß eine Erhöhung der Temperatur, und zwar bis über die Temperatur am Erdboden, angenommen werden. Ähnliches haben F. A. LINDEMANN und G. M. B. DOBSON aus Beobachtungen von Sternschnuppen gefolgert. Wahrscheinlich kommt die ultraviolette Absorption des Sonnenlichtes durch Ozon zur Geltung, das in den Höhen der Atmosphäre unter dem Einflusse der Sonnenstrahlung entsteht. Der Verfasser gibt rechnerische Abschätzungen.

A. WALTHER, **Über nichthomogene lineare Differenzialgleichungen** (Vorgelegt von C. RUNGE am 29. X. 1926.) Über asymptotisches Verhalten von Differenzausgleichungen; Untersuchung des Grenzüberganges zur Differentialgleichung.

R. POHL, **Über das Absorptionsspektrum des antirachitisch wirksamen Cholesterins.** (Vorgelegt am 10. XII. 1926.)

R. POHL, **Über das Absorptionsspektrum des antirachitischen Provitamins und Vitamins.** (Vorgelegt am 14. I. 1927.) Der wesentliche Inhalt der beiden Mitteilungen ist in dem Vortrage zusammengefaßt, der in Heft 20 der Naturwissenschaften von 1927, S. 433—438, veröffentlicht ist.

M. BORN, **Zur Wellenmechanik der Stoßvorgänge.** (Vorgelegt am 14. I. 1927.) Die vom Verfasser entworfene allgemeine Theorie des Stoßes punktförmiger Teilchen gegen Atome wird für den Fall des Wasserstoffatoms durchgerechnet. Es ergeben sich Formeln für die Ausbeute als Funktion der Anfangs- und Endgeschwindigkeit, sowie der Ablenkung des Teilchens für den elastischen Stoß und diejenigen unelastischen Stöße, die vom Grundzustande zu den Zuständen mit der Hauptquantenzahl $n = 1$ führen. Die Formel für die elastischen Stöße umfaßt auch als Grenzfall das RUTHERFORDsche Gesetz der Ablenkung von α-Teilchen, mit einer Abänderung, die von der Abschirmung der Kernladung durch die Atomelektronen herrührt.

P. JORDAN, Göttingen, **Über eine Neubegründung der Quantenmechanik.** (Vorgelegt von M. BORN am 14. I. 1927.) In dieser Arbeit wird der Formalismus der Quantenmechanik zurückgeführt auf einige wenige Axiome über relative Wahrscheinlichkeiten physikalischer Größen. Es wird postuliert,. daß es eine Funktion $\varphi(x_1 y)$ gibt von der Eigenschaft, daß das Quadrat ihres Betrages die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß eine Variable 9 Werte zwischen x und $x + dx$ annimmt, welche eine zweite Variable Q den Wert y hat. Dieser Funktion, welche Wahrscheinlichkeitsamplitude genannt wird, werden einige einfache Postulate auferlegt, die Verallgemeinerungen der Grundsätze der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitslehre sind, und es wird gezeigt, daß dann die Formeln der Quantenmechanik daraus abgeleitet werden können.

H. STILLE, **Über die nordöstliche Fortsetzung der westfälischen Steinkohlenformation.** (Vorgelegt am 14. I. 1927.) Eine neue Etappe auf dem Wege des Nachweises der Fortsetzung der rheinisch-westfälischen Kohlenformation nach Osten ist durch eine Tiefbohrung bei Detmold gewonnen worden, die die Kohlenformation in rund 1050 m Tiefe festgestellt hat. Schon etwas vorher hatte eine Tiefbohrung bei Lippspringe (nordöstlich Paderborn) wichtige Aufschlüsse über den bisher kaum bekannten Untergrund des östlichen Teiles der Westfälischen Kreidemulde ergeben. Aus der Kombination dieser Bohrergebnisse und auf Grund älterer Feststellungen des Verfassers über den Bau des Teutoburger Waldes erhalten wir ein gegenüber der bisherigen Auffassung in mehrfacher Hinsicht verändertes Bild über den Ostrand der unter der westfälischen Kreide verborgenen „Rheinischen Masse", die weiter westlich die Kohlen Westfalens umschließt, und es ergibt sich die Aussicht, in bisher für unhöffig gehaltenen Gebieten die Fortsetzung der Kohlenformation Westfalens zu erschließen.

A. WINDAUS, **Über die Formeln der Digitalisglykoside. I. Über Digitoxin.** (Vorgelegt am 14. I. 1927.)

Die von CLOETTA für das Digitoxin aufgestellte Formel $C_{44}H_{70}O_{14}$ wird durch $C_{41}H_{64}O_{13}$ ersetzt. Für das Digitoxigenin wird die Formel $C_{23}H_{34}O_4$ aufgestellt. Es werden neue Derivate des Digitoxigenins beschrieben.

A. WINDAUS und A. HESS, **Sterine und antirachitisches Vitamin.** (Vorgelegt von A. WINDAUS am 22. I. 1927.) Es wird gezeigt, daß das Ergosterin die Vorstufe des antirachitischen Vitamins darstellt, und daß es bei der Bestrahlung in das Vitamin selbst übergeht.

H. SPÄTH, **Bemerkungen über nichthomogene lineare Differenzengleichungen.** (Vorgelegt durch K. COURANT am 28. I. 1927.) Charakteristische Beispiele zu der obengenannten Arbeit von A. WALTHER.

W. HEUBNER, **Über die Giftempfindlichkeit von Organen kranker Tiere.** (Vorgelegt am 11. II. 1927.) In Versuchen von G. HECHT wurden Meerschweinchen künstlich krank gemacht (durch Phosphorvergiftung, Diphtherietoxin oder Tuberkuloseinfektion) und an den überlebenden und isolierten Herzen oder Uteruskörnern dieser Tiere die Schwellendosen bestimmter Gifte aufgesucht (Strophantin am Herzen, Histamin am Uterus). Das gleiche erfolgte an gesunden Tieren gleicher Herkunft und Verpflegung. Trotz der individuellen Schwankungsbreite ließ sich an phosphorvergifteten Tieren regelmäßig eine deutlich gesteigerte Empfindlichkeit nachweisen: Schädigung der Herzfunktion verschiedenen Grades bei den Verdauungen 10^{-10} bis 10^{-8} (satt 10^{-8} bis 10^{-6} an den Herzen normaler Tiere). Nach Diphtherievergiftung oder Erkrankung an Tuberkulose war in einem *Teil* der Fälle das gleiche zu beobachten, bei dem Rest normales Verhalten. Am Uterus ließ sich eine Empfindlichkeitsänderung nicht auffinden.

H. WEYL, Zürich, **Elementare Sätze über die Komplex- und Drehungsgruppe.** (Vorgelegt in der Sitzung vom 25. II. 1922.)

E. HECKE, Hamburg, **Neue Herleitung der Klassenzahlrelationen von Hurwitz und Kronecker.** (Vorgelegt in der Sitzung vom 25. II. 1927). Die merkwürdigen und bisher ganz unverständlichen Klassenzahlrelationen, welche HURWITZ aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen abgeleitet hat, werden hier mit rein arithmetischen Mitteln bewiesen, und es wird gezeigt, daß sie nur eine elementare Beziehung zwischen ternären und quaternären quadratischen Formen enthalten, in welche die Klassenzahlen durch den Gaussschen Satz über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von drei Quadraten eingehen.

FR. V. WETTSTEIN, **Über plasmatische Vererbung, sowie Plasma und Genwirkung** (Vorgelegt durch A. KÜHN am 25. II. 1927.) Ausgehend von früheren Vererbungsversuchen mit multiploiden Moosrassen wurde versucht, in zwei Fragen weitere Ergebnisse zu erzielen, in der Frage nach *plasmatischen Konstitutionselementen* und nach dem *Zusammenwirken von genetischen Kern- und Plasmabestandteilen*. Durch eine Kreuzungsanalyse von Sippen-, Art-, Gattungs- und Subfamilienbastarden innerhalb der Moosgruppe der *Funariaceen* gelang die Feststellung, daß sich die verschiedenen Typen mit steigender verwandtschaftlicher Entfernung in einer immer größeren Anzahl mendelnder Gene unterscheiden, und daß gleichzeitig immer größere genetisch konstante Plasmaunterschiede hervortreten. Für die Sippen von *Funaria hygrometrica* wurde einheitliches Plasma festgestellt. An untersuchten Artbastarden sind Genome und Plasmen austauschbar. Fremde Plasmen sind mit den ausgetauschten Genomen lebensfähig und bedingen andere Gestaltung. Bei den untersuchten Gattungen sind Kombinationen fremder Genome und Plasmen nicht mehr lebensfähig. Die vaterähnlichen Nachkommen treten nicht mehr in Erscheinung. Durch Einlagerung verschiedener Genomanzahl in eigenes und fremdes Plasma konnte die Wechselwirkung beider studiert werden. Im eigenen Plasma wirken die Genome proportional ihrer Quantität. In fremden Plasma steigt die Genwirkung mit ansteigender Quantität zunächst zu einem Maximum an, das aber die Wirkung im eigenen Plasma nicht erreicht. Eine weitere Vermehrung fremder Genome wirkt hemmend bis zur vollständigen Unterdrückung der durch das Genom bewirkten Merkmalausbildung.

G. TAMMANN, **Bemerkungen über das Absorptionsspektrum des Wassers.** (Vorgelegt am 25. III. 1927.) Die Abhängigkeit der physikalischen Eigenschaften des Wassers vom Druck und der Temperatur macht es wahrscheinlich, daß im Zustandsfelde zwischen der Schmelzkurve des gewöhnlichen Eises (I) und einer Geraden von $p = 1$ und 60° bis zum Tripelpunkt: Eis I, Eis III und Wasser, eine Molekülart I im Wasser enthalten ist, welche das Eis I bildet und durch ihr großes Volumen ausgezeichnet ist. Mit wachsender Temperatur und steigendem Drucke nimmt ihre Konzentration ab (Zeitschr. f. anorg. u. allg. Chem. 158, 1, 1926).

Die Durchmusterung des Absorptionsspektrums des Wassers ergab, daß die Absorptionsbande bis 4,7 μ im Spektrum des Wasserdampfes fehlt, im Spektrum des Eises sehr stark ist, viel schwächer im Spektrum des Wassers und noch schwächer im Spektrum einer gesättigten Salmiaklösung. Die Absorptionsbande bis 4,7 μ tritt also umso deutlicher hervor, je größer die Konzentration der Molekularart I ist.

KONRAD BÜTTNER, Göttingen. **Der kosmische Ursprung der Intensitätsschwankungen der durchdringenden Höhenstrahlung.** (Vorgelegt durch E. WIECHERT am 25. III. 1927.) Mit Geldmitteln, welche von der Luftelektrischen Kommission der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen geboten wurden, hat der Verfasser Messungen der durchdringenden Höhenstrahlung am Erdboden, im Flugzeug und im Gebirge durchgeführt. Bleischirme wurden zu Hilfe genommen. — Die Strahlen erwiesen sich als um so härter (stärker durchdringend), je mehr Materie sie durchlaufen hatten; sie erschienen also als stark inhomogen. — Die tägliche Periode der Intensität wurde an verschiedenen Orten im Gebirge (Ötztaler Alpen, Jungfraugebiet) und zu verschiedenen Jahreszeiten (August—September, März) untersucht. Das Verhalten entspricht der Annahme kosmischen Ursprungs. In Übereinstimmung mit den Messungen von KOHLHÖRSTER wurden 3 Maxima gefunden. Die Form des Morgenmaximums im August paßt sich einigermaßen der Annahme einer punktförmigen Strahlungsquelle im Himmelsäquator an.

Herausgeber und verantwortlicher Schriftleiter: Dr.-Ing. e. h. DR. ARNOLD BERLINER, Berlin W 9.
Verlag von Julius Springer in Berlin W 9. — Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.